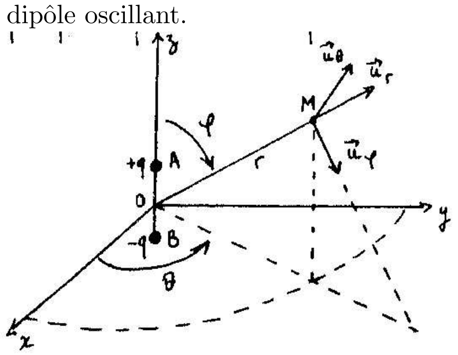
Électromagnétisme

T.D N°9 d'électromagnétisme

Rayonnement dipôlaire

⋆ **Exercice 1 :**

On considére un système placéedans le vide, constitué de deux sphères métalliques reliées par un conducteur filiforme de longueur l, porté par Oz. Les sphères sont situées en $z = \pm\frac{l}{2}$et leur diamètre est négligeable devant l ? Al'aide d'un dispositif d'allimentation convenable, ces deux sphères portent des charges q(t) et -q(t) qui dépendent du temps et dont la valeur moyenne dans le temps est nulle le courant I(t) circulant dans le conducteur est sinusoïdal de pulsation ω, et de la forme, en notation complexe : $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ ce système constitue un dipôle oscillant.



On se propose d'étudier le champ électromagnétique qu'il rayonne dans l'espace. On utilisera le système de coordonnées sphèriques précisées dans la figure ci-contre $(0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi; r \geq 0$.

1. On envisage tout d'abord le cas ou l et la distance OM = r du centre du dipôle au point M de l'espace sont tels que : $l \ll r \ll \lambda$, λ étant la longueur d'onde du rayonnememt émis.
   (a) Etablir les expressions du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ et du potentiel scalaire v, crées au point M par ce dipôle oscillant.
   (b) Calculer les composantes $B_r, B_\varphi, B_\theta, E_r, E_\varphi, E_\theta$ du champ électromagnétique. on rapelle l'expression du rationnel en coordonnées sphèriques : $rot\overrightarrow{A} = \frac{1}{r\sin\varphi}[\frac{\partial(A_\theta \sin\varphi)}{\partial\varphi}]\overrightarrow{u}_r + [\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}]\overrightarrow{u}_\varphi + \frac{1}{r}(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi})\overrightarrow{u}_\theta$
2. On regarde maintenant le cas ou la distance OM n'étant plus petite devant la longueur d'onde λ, on ne néglige plus le phénomène de propagation. On admet alors aue le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ existant à l'instant t au point M est celui crée par le courant circulant dans le dipôle à un instant t' tel que le signal électromagnétique qu'il émet parvienne au temps t en M. la longueur l est toujours trés petite devant λ et devant r ($l \ll \lambda \;\; et \;\; l \ll r$). On introduira dans le les calculs seulement c, vitesse de la lumière, et μ_0 perméabilité magnétique du vide.
   (a) Etablir l'expression du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t)$.
   (b) Calculer les composantes du champ magnétique B_r, B_φ, B_θ et en déduire celles du champ électrique E_r, E_φ, E_θ.
3. Dans le cas ou $r \gg \lambda$:
   (a) Montrer que le champ rayonné a la structure d'une onde plane. Calculer ses composantes et le rapport $|\overrightarrow{E}|/|\overrightarrow{B}|$.
   (b) Déterrminer le vecteur de Poyting $\overrightarrow{R}$ et sa valeur moyenne dans le temps. En déduire la puissance moyenne rayonnée dans tout l'espace exprimée en fonction de I_0, λ, l, μ_0 et c.
   (c) Sachant que l'amplitude minimale du champ électrique ditecté par un récepteur situé à la distance r, dans le plan xOy, est E_m, calculer la puissance nécessaire d'émission.

⋆ **Exercice 2 :Rayonnement d'un dipôle oscillant**

1. **Champ du dipôle oscillant** :
   (a) Un dipôle oscillant de pulsation ω, de moment dipolaire désigné par : $\underline{\overrightarrow{p}} = \underline{\overrightarrow{p}}_0 e^{j\omega t}$, en notation complexe, placé à l'origine du système de coordonnées, engendre un champ électromagnétique variable. Une expression approchée du potentiel vecteur retardé, appartenant à la jauge de Lorentz, engendré par ce dipôle oscillant en un point situé à la distance r de l'origine, est :
   $$\underline{\overrightarrow{A}}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} j\omega \underline{\overrightarrow{p}}_0 \frac{e^{j(\omega - kr)}}{r} \quad avec \quad k = \frac{\omega}{c}$$
   Rappeler les approximation utilisées pour justifier cette expression.
   (b) Donner le champ électromagnétique rayonné à grande distance par ce dipôle.
2. **Puissance rayonnée** :
   (a) Quelle est la valeur moyenne du vecteur de Poyting associé à ce rayonnement ?
   (b) Quelle est la puissance moyenne rayonnée par le dipôle ?
   (c) Montrer que ce résultat est en accord avec la formule de Lamour : $P = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2}{3c^3}$ donnant la puissance rayonnée par une charge q d'accélération a.

⋆ **Exercice 3 :Diffusion par un électron élastique lié**

1. **Péliminaire :**
   Quelle est la dimension de la grandeur : $r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$? Un atome est soumis au champ d'une O.P.P.M. électromagnétique dont le champ électrique est, en notation complexe, $\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{j(\omega_i - kz)}$. Pour rendre compte de la réponse de l'atome, on adopte le modèle de l'électron élastiquement lié, assimilé à un oscillateur spatial de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité Q.
   Pour exprimer les résultats, il sera judicieux de faire appaître la grandeur r_e précédemment introduite, appelée rayon classique de l'électron.
2. **Section efficace de diffusion :**

(a) Etablir l'expression de la puissance moyenne rayonnée par l'atome excité par l'O.P.P.M. incidente.

(b) En déduire l'expression de la section efficace σ de difussion de rayonnement, définie comme le rapport entre le nombre moyen de photons diffusés par l'atome " cible " et le flux de photons " projectils" incidents par unité de surface, ou encore le rapport entre la puissance moyenne diffusée et le flux surfacique moyen d'énergie incident.

(c) Tracer l'allure du graphe de cette section de diffusion $\sigma = f(\omega)$, sachant que la facteur de qualité est trés élevé.

(d) Quel phénomène évoqué dans le cours retrouve-t-on au voisinage de la pulsation ω_0 ?

3. **Diffusion Rayleih :**
Quel est le comportement asympototique de la section efficace de diffusion à basse fréquence ? A quel autre phénomène évoqué dans le cours peut s'appliquer ce résultat ?

4. **Diffusion Thomson :**
Quel est le comportement asympototique de la section efficace de diffusion à haute fréquence ? Cette diffusion est appelée diffusion Thomson.
Donnée : la puissance rayonnée par une charge non relativiste d'accélération a est donnée par la formule de Larmor : $\mathcal{P} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2}{3c^3}$

⋆ **Exercice 4 :Pourquoi le ciel est-il bleu ?**

Un électron de masse m et de charge -e est soumis d'un part à un rayonnement électromagnétique et d'autre part à une force de rappel vers sa position d'équilibre de la forme $-m\omega_0^2\overrightarrow{S}$ ou $\overrightarrow{S}$ est le déplacement par rapport à sa position d'équilibre et ω_0 une pulsation propre. Ce modèle permet d'étudier, pour un électron lié dans un atome ou une molécule, le rayonnement réémis, du e^- son mouvement. On se placera dans les conditions ou : $|\overrightarrow{S}| \ll \lambda \ll r$, longueur d'onde du rayonnement incident et de rayonnement réémis et $|\frac{d\overrightarrow{S}}{dt}| \ll c$, c étant la vitesse de la lumière.
On donne $e = 1,6.10^{-19}C; m = 0,91.10^{-30}kg$.

1. On excite l'électron par une onde plane électromagnétique, sinusoïdale de pulsation ω, polarisée , de champ électrique en notation complexe $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 e^{-i\omega t}$, dirigé suivant Oz. La pulsation ω est trés petite devant $\omega_0 (\omega \ll \omega_0)$. L'atome ou la molécule constitue un dipôle oscillant dont on calculera le moment dipôlaire $\overrightarrow{p}(t)$.
   (a) Définir le produit I(t) l ou $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ désigne l'intensité qui circule dans le dipôle et l " la longueur " du dipôle. la puissance totale moyenne rayonnée dans tout l'espace par un dipôle s'écrit : $P = \frac{\mu_0\omega^2 I_0^2 l^2}{12\pi c}$.
   (b) En déduire le rapport $\frac{p}{p_0}$ de la puissance totale moyenne réémise par l'électron dans tout l'espace à la puissance moyenne p_0 par unité de surface de l'onde incidente en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$, e, m et μ_0.
   (c) **Application numérique :** calculer numériquement le rapport $\frac{p}{p_0}$ pour $\frac{\omega}{\omega_0} = 10^{-1}$.
2. Etudier les variations du rapport $\frac{p}{p_0}$ en fonction de la longueur d'onde λ.
Interpréter alors la teinte observée de l'atmosphère sans nébulosité, sous l'influence de rayonnement solaire.