Devoir surveillé de Sciences Physiques n°1
la mécanique des solides
Durée :2h 30min

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre. Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. La barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Problème N°1

Soient $R_0(0, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$ un repère fixe orthonormé direct et deux constantes positives a et b. On considère le cercle (C_o) du plan $(\overrightarrow{OX_0}, \overrightarrow{OY_0})$, de centre 0 et de rayon a,lié à R_0. On considère le cercle (C), de centre B et de rayon b, répondant à chaque instant aux deux conditions suivantes :

- (C) reste en contact avec (C_o) en un point I, de manière que $\overrightarrow{IB} = b\overrightarrow{Z_o}$.
- L'axe de (C) coupe $\overrightarrow{OZ_o}$ en A de manière à ce que $\overrightarrow{OA} = b\overrightarrow{Z_o}$.

On lié au cercle (C) un trièdre orthonormé direct $(B, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ constituant le repère R, tel que $\overrightarrow{Z} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. On définit le repère orthonormé direct $(B, \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{Z_o})$ constituant le repère R' en posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Z_o} \bigwedge \overrightarrow{Z}$.
On pose $(\widehat{\overrightarrow{OX_o}, \overrightarrow{0I}}) = \theta$ et $(\widehat{\overrightarrow{Bu}, \overrightarrow{BX}}) = \varphi$ (fonctions de t).
Soit M le point (lié à R), défini par $\overrightarrow{BM} = b\overrightarrow{X}$.

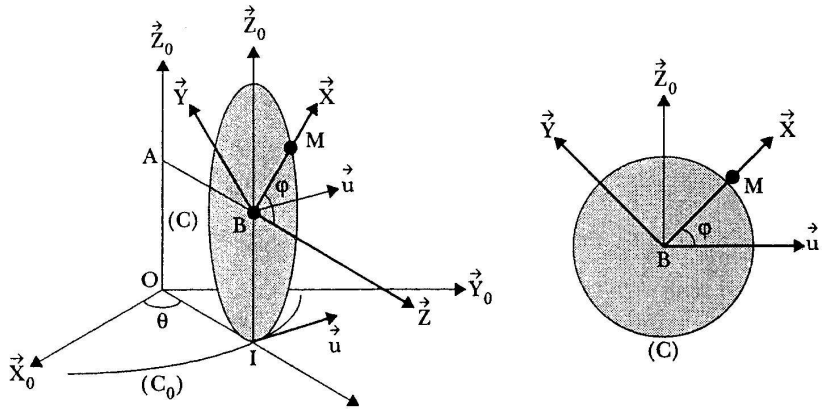
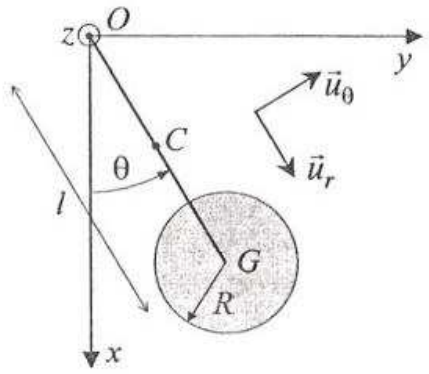


Fig. 1 –

1. Calculer $\overrightarrow{V}(M/R_0)$ et $\overrightarrow{a}(M/R_0)$
2. Si R' est le repère relatif et R_o le repère absolu, on calculera :
   (a) $\overrightarrow{V}(M/R')$ et $\overrightarrow{a}(M/R')$
   (b) $\overrightarrow{V}(M\epsilon R'/R_0)$ et $\overrightarrow{a}(M\epsilon R'/R_0)$
   (c) Retrouver la vitesse absolue et l'accélération absolue calculées à la première question.
3. (a) Calculer la vitesse de glissement, $\overrightarrow{V}(I\epsilon R/R_0)$ du disque (C) par rapport à R_o.
   (b) Calculer $\overrightarrow{a}(I\epsilon R/R_0)$ et montrer que si $\overrightarrow{V}(I\epsilon R/R_0) = 0$ alors $\overrightarrow{a}(I\epsilon R/R_0)$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AI}$.

Problème N°2
OSCILLATIONS DES SOLIDES (1)

On étudie les mouvements de l'association d'un disque homogène, de centre d'inertie G, de masse m et de rayon R. et d'une tige mince également homogène, de centre d'inertie C, de masse m' = 2m et de longueur l, reliée au centre du disque par une de ses extrémités. Son autre extrémité O est reliée à l'axe horizontal Oz, fixe dans un référentiel galiléen, par une liaison parfaite permettant la rotation dans le plan Oxy. Sa position est repérée par l'angle θ formé avec la verticale descendante Ox. Le seul champ de force présent est celui de pesanteur.



1. La liaison en G est d'abord supposée rigide.
   (a) Quelle est la grandeur qui se conserve pour le système disque + tige ?
   (b) Quelle est sa configuration d'équilibre ?
   (c) En déduire, en explicitant la grandeur conservative, la période T des petites oscillations du système autour de cette configuration. On rappelle que le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution est $J = \frac{mR^2}{2}$ et celui de la tige par rapport a une de ses mediatrices $J' = \frac{m'l^2}{12}$
2. La liaison en G est désormais supposée parfaite, permettant la libre rotation du disque autour de son axe de révolution, parallèle à Oz.
   (a) Pour quelle raison la vitesse angulaire de rotation Ω_{disque} du disque reste-t-elle constante ?
   (b) A-t-on la même grandeur conservative pour le système disque + tige ?
   (c) Quelle est sa configuration d'équilibre ?
   (d) En déduire la période T' des petites oscillations du système autour de cette configuration.
3. Comparer T et T'. Pouvait-on prévoir quelle serait la plus grande période ? Faire les applications numériques pour T et T'avec les valeurs m = 200 g, 1=30 cm, R=5 cm et $g = 9,81 m.s^{-2}$.
4. Un moteur situé à l'extrémité de la tige impose au disque une vitesse angulaire de rotation de la forme $\overrightarrow{\Omega} = \Omega_0 sin(\omega t)\overrightarrow{u_z}$.
   (a) Établir l'équation différentielle que vérifie l'angle θ pour de petites oscillations.
   (b) Décrire les deux régimes sinusoïdaux qui se superposent. On introduira la pulsation $\omega_l = \sqrt{\frac{6g}{5l}}$ en donnant sa signification. Préciser l'origine de chacun.
   (c) Peut-on faire démarrer les oscillations de la tige avec ce moteur ? Quelle valeur de ω a-t-on intérêt à utiliser pour y arriver le plus rapidement possible ?
   (d) La divergence apparemment possible du régime forcé a-t-elle un sens ?
   (e) On prend pour conditions initiales $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$.
      i. Calculer $\theta(t)$.
      ii. Comment se manifeste la divergence lorsque $\omega \to \omega_l$ dans ce cas précis ?
      iii. Définir, en cas de divergence, une durée caractéristique τ d'amplification.
      iv. Représenter graphiquement $\theta(t)$, toujours en cas de divergence, de manière qualitative. Sur quel intervalle de temps ce graphe est-il acceptable ?

Problème N°3
OSCILLATIONS DES SOLIDES (2)

Ce problème traite des mouvements d'oscillation de deux solides simples, mouvements pouvant être couplés. Il est à noter que les parties 1 et 2 sont indépendantes. Le référentiel du laboratoire étant considéré comme galiléen, on lui associe un repère orthonormé direct 0'xyz et on note $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$ les vecteurs unitaires correspondants aux trois axes. L'axe O'y étant vertical orienté positivement vers le haut, le vecteur accélération dû à la pesanteur s'écrit $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_y}$ avec $g = 10m.s^{-2}$.

1 Oscillations dans le champ de pesanteur terrestre

On considère une tige homogène, de masse m, de longueur 2L et de centre d'inertie G (les dimensions transversales de la tige sont négligeables devant L). Ultérieurement, le mouvement de ce solide va s'effectuer dans le plan vertical xO'y (voir schéma n°1). Soit un point O appartenant à la tige tel que OG = l< L. On note Gz un axe passant par G, perpendiculaire à la tige, orienté dans le sens du vecteur $\overrightarrow{e_z}$; de même, on note Oz un axe passant par O, perpendiculaire à la tige, orienté dans le sens du vecteur $\overrightarrow{e_z}$. On donne le moment d'inertie du solide relativement à l'axe Gz, soit $I_G = \frac{mL^2}{3}$.

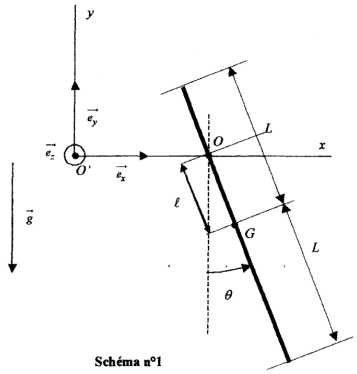
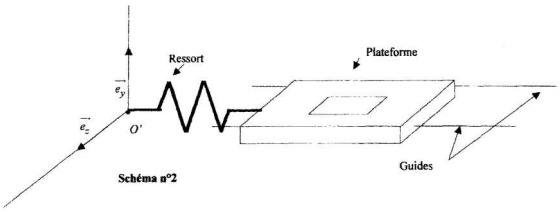


Schéma n°1

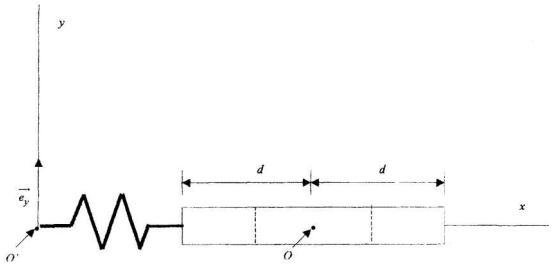
1. Le moment d'inertie I_0 de la tige relativement à l'axe Oz peut se calculer à partir de la formule $I_0 = I_G + ml^2$ (formule découlant du théorème de Huygens). On désire obtenir $I_0 = 3/2ml^2$, déterminer la valeur du rapport $\frac{l}{L}$ dans ce cas. Ceci sera maintenu dans la suite du problème (partie 3).
2. Soumise à l'action de la pesanteur, la tige effectue des mouvements d'oscillation dans le planx O'y, l'axe Oz étant maintenu horizontal et fixe, on repère sa position par l'angle $\theta = \theta(t)$. La liaison en O étant supposée parfaite, la réaction d'axe en O se limite à une force $\overrightarrow{R}$ agissant en O. Établir les expressions de l'énergie cinétique E_C et de l'énergie potentiene de pesanteur E_p du solide en fonction de m,l,θ,$\frac{d\theta}{dt}$ et g.
3. Justifier le fait que l'énergie totale est constante au cours du mouvement ; en déduire l'équation différentielle pour la variable θ.
4. La tige étant lâchée sans vitesse initiale avec $\theta(0) = \theta_0 = 0,1rad$ ce qui correspond à des petits mouvements, simplifier puis résoudre l'équation obtenue à la question 3 ; en particulier, exprimer puis calculer la valeur de la pulsation du mouvement obtenu, pulsation notée ω_1.
   A.N : $l = \frac{20}{9}m \simeq 2,22m$.

2 Oscillateur harmonique

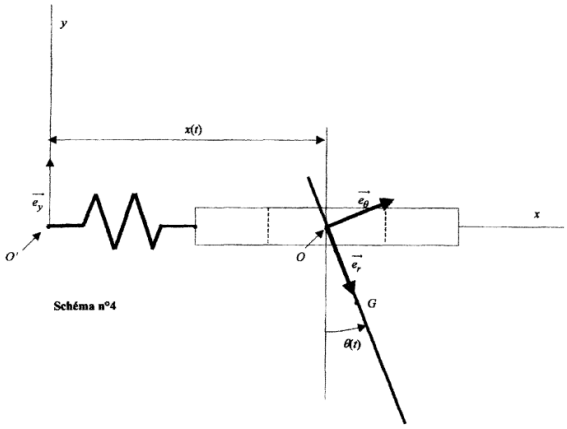
Une plateforme-support, de masseM, de centre d'inertie O, est guidée de façon à ne pouvoir effectuer qu'un mouvement de translation suivant l'axe O'x (voir schéma n°2). Elle comporte un évidement dont l'intérêt apparaîtra à la partie 3. La liaison guides-plateforme est supposée parfaite. Cette plateforme est solidaire de l'une des extrémités d'un ressort de raideur K, l'autre extrémité du ressort étant fixée au point O'. On repère la position de la plateforme par l'abscisse x du point O, soit $\overrightarrow{O'O} = x(t)\overrightarrow{e_x}$. La longueur au repos du ressort étant l_0, à l'équilibre, cette abscisse vaut donc $x_0 = l_0 + d$, 2d désignant la longueur de la plateforme (voir schéma n°3). On écarte le point O de sa position d'équilibre d'une quantité X_0 et on lâche la plateforme sans vitesse initiale.



1. On pose $X = x - (l_0 + d)$. Exprimer l'énergie potentielle emmagasinée par le ressort cn fonction de K et X.
2. Exprimer l'énergie totale de la plateforme en fonction de K,M,X,$\frac{dX}{dt}$ celle-ci étant constante au cours du mouvement, en déduire l'équation différentielle pour la variable X.
3. Déterminer l'expression de X en fonction du temps.



3 Oscillations couplées



La tige et la plateforme précédentes sont associées comme indiqué sur le schéma n°4. L'articulation en O étant supposée parfaite, on note $\overrightarrow{R} = T\overrightarrow{e_x} + N\overrightarrow{e_y}$, la réaction d'axe s'exerçant sur la tige. Les paramètres du problème sont comme précédemment X et θ, deux fonctions du temps. On notera $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, les deux vecteurs unitaires de la base polaire du plan vertical : $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OG}}{OG}$; $\overrightarrow{e_\theta}$ se déduisant de$\overrightarrow{e_r}$ par une rotation de $\frac{\pi}{2} rad$.

1. Exprimer accélération de O suivant $\overrightarrow{e_x}$, puis $\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$ suivant $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, en fonction de X(t), $\theta(t)$ et de leurs dérivées ; en déduire les composantes du vecteur $\overrightarrow{\Gamma_G}$ accélération de G, dans le référentiel du laboratoire, suivant $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$?.
2. Par application du théorème de la résultante cinétique à la tige, écrire les expressions de N et T en fonction de m,g,l,θ,$\frac{d\theta}{dt}$,$\frac{d^2\theta}{dt^2}$,$\frac{d^2X}{dt^2}$.
3. Déterminer l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_G}$ de la barre, relativement au point G, dans le référentiel du laboratoire.
4. Ecrire $\frac{d\overrightarrow{\sigma_G}}{dt}$ et établir une relation liant la quantité $I_G\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et N,T,l,θ.
5. D'après les questions 2 et 4, écrire une équation différentielle faisant intervenir $\frac{d^2X}{dt^2}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.
6. Dans l'hypothèse des petits mouvements, montrer que l'équation obtenue à la question 5. peut s'écrire sous la forme :
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_1^2\theta = -\alpha\frac{d^2\frac{X}{l}}{dt^2} \tag{1}$$
où α est un coefficient dont on donnera expression.
7. Par application du théorème de la résultante cinétique à la plateforme, en projection sur l'axe des x, écrire une équation différentielle faisant intervenir$\frac{d^2\theta}{dt^2}$,X,θ,$\frac{d\theta}{dt}$ et$\frac{d^2X}{dt^2}$.
8. Montrer que, dans l'hypothèse des petits mouvements, l'égalité obtenue peut se mettre sous la forme :
$$\frac{d^2(\frac{X}{l}}{dt^2} + \omega_2^2\frac{X}{l} = -\beta\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2}$$
Expliciter les expressions de la pulsation ω_2 et du coefficient β.

9. On donne : m = 4,5 kg ; M = 1,5 kg ; $K = 24N.m^{-1}$. Calculer les valeurs numériques de ω_2^2 et du produit $\alpha\beta$.
10. On recherche des solutions du système des équations (1) et (2) sous la forme $\theta = Acos\Omega t$ et $\frac{X}{l} = Bcos\Omega t$ où Ω est une pulsation a priori inconnue, A et B étant deux constantes réelles. Vérifier que les 2 valeurs de $\Omega = \sqrt{2}rad.s^{-1}$ et $\Omega = 2\sqrt{3}rad.s^{-1}$ sont possibles (pour ce calcul, on pourra prendre $\omega_1 = \sqrt{3}rad.s^{-1}$ et $\omega_2 = 2rad.s^{-1}$.
11. Montrer que :

$$\theta = \frac{3}{5}\theta_0 cos[\sqrt{2}.t] + \frac{2}{5}\theta_0 cos[2\sqrt{3}.t] \quad (3)$$

$$\frac{X}{l} = \frac{9}{20}\theta_0(cos[\sqrt{2}.t] - cos[2\sqrt{3}.t]) \quad (4)$$

constituent une solution du système des équations (1) et (2), vérifiant les conditions initiales $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$,$\theta(0) = \theta_0$, X(0) = 0, $\frac{dX}{dt}(0) = 0$.