

Mécanique de solide

T.D N°2

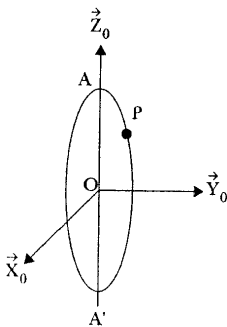
Dynamique et étude énergétique du solide

★ Exercice 1 :

Soit $R_0(0; \vec{X}_0; \vec{Y}_0; \vec{Z}_0)$ un repère fixe orthonormé direct galiléen lié à la Terre où $\vec{OZ}_0$ désigne la verticale ascendante. Un cercle (C) de centre O et de rayon a tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe $\vec{OZ}_0$ de façon à ce qu'un de ses diamètres AA' soit confondu avec $\vec{OZ}_0$. Un point matériel P, de masse m, est mobile sans frottement sur (C).

On définit deux autres repères orthonormés directs, $R_1(0; \vec{u}; \vec{v}; \vec{Z}_0)$ lié à (C) et obtenu à partir de R_0 par une rotation d'angle ψ autour de l'axe $\vec{OZ}_0$ et $R(0; \vec{X}; \vec{v}; \vec{Z})$ lié au point P et obtenu à partir de R_1 par une rotation d'angle φ autour de l'axe $\vec{Ov}$.

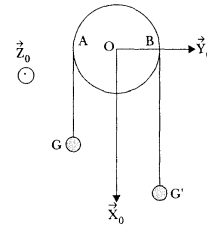
1. Déterminer le vecteur rotation instantanée, $\vec{\Omega}(R/R_0)$, de (P) par rapport R_0
2. Déterminer les éléments de réduction du torseur cinétique, $\Omega_v[\vec{R}_v, \vec{\sigma}_p(P/R_0)]$, en P du point matériel P.
3. Donner les éléments de réduction du torseur dynamique, $\Omega_D[\vec{R}_a, \vec{\delta}_p(P/R_0)]$ en P, du point matériel P.
4. Déterminer l'équation du mouvement de P en utilisant les théorèmes généraux.
5. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de l'énergie.
6. Donner l'expression de l'énergie potentielle, V(P), du point matériel P et écrire l'intégrale première de l'énergie.



★ Exercice 2 :

Dans un plan $(\vec{OX}_0, \vec{OY}_0)$, où $\vec{OX}_0$ est la verticale descendante, d'un repère fixe orthonormé direct galiléen $R_0(0; \vec{X}_0; \vec{Y}_0; \vec{Z}_0)$, une poulie, schématisée par un disque (D) de rayon a, tourne autour de son axe $\vec{OZ}_0$. Les efforts exercés par l'axe sur (D) sont schématisés par le vecteur $\vec{R}$, on suppose que leur moment est normal à $\vec{OZ}_0$. Un fil souple, inextensible, de masse né-

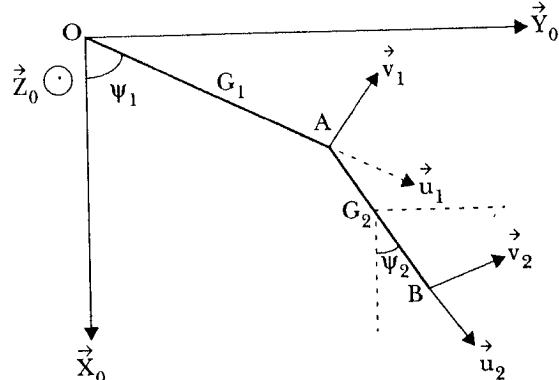
gligeable et de longueur l, passe autour de la poulie. Deux masselottes m et m' sont fixées aux extrémités G et G' du fil. On suppose qu'il n'y a pas de glissement du fil sur la poulie et on néglige les efforts de liaison au contact fil-poulie. On désigne par I le moment d'inertie de (D) par rapport à $\vec{OZ}_0$ et par g l'intensité de la pesanteur. On définit un autre repère orthonormé direct $R(0; \vec{u}; \vec{v}; \vec{Z}_0)$ lié à la poulie et obtenu à partir de R_0 par une rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{OZ}_0$.



1. Déterminer les paramètres du mouvement et appliquer en projection sur l'axe $\vec{OZ}_0$ le théorème du moment cinétique au système total $(\Sigma) = (D) \cup m \cup m'$
2. Déterminer explicitement les paramètres en fonction de temps.
3. Déterminer les tensions $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ dans les deux brins du fil.

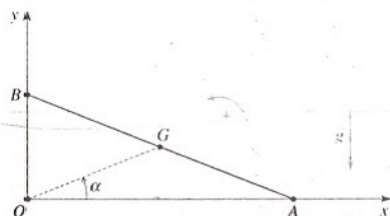
★ Exercice 3 :

Dans le plan vertical $(\vec{OX}_0, \vec{OY}_0)$ d'un repère fixe orthonormé direct galiléen $R_0(0; \vec{X}_0; \vec{Y}_0; \vec{Z}_0)$, on considère le mouvement d'un pendule double constitué de deux tiges rectilignes homogènes (OA) et (OB), respectivement de masse m_1 , de longueur l_1 , de centre de gravité G_1 et de masse m_2 , de longueur l_2 , de centre de gravité G_2 . le point O est fixe par rapport au repère R_0 et au point A, on a une articulation parfaite. Déterminer, à l'aide des théorèmes généraux, les équations du mouvement du système.



★ Exercice 4 : Mouvement d'une barre appuyée contre un mur

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une barre AB homogène, de longueur $2b$ et de centre G , milieu de AB, est posée sur le sol horizontal et repose contre un mur vertical. Sa position est déterminée par l'angle $\alpha = (\vec{OX}, \vec{OG})$. Les contacts en A et en B sont supposés sans frottement.



1. Écrire l'intégrale première de l'énergie en supposant qu'à l'instant initial, la barre est immobile avec une inclinaison α_0 .
2. Calculer la réaction $\vec{R}_B$ du mur sur la barre, et en déduire pour quelle inclinaison α_1 la barre quitte le mur.

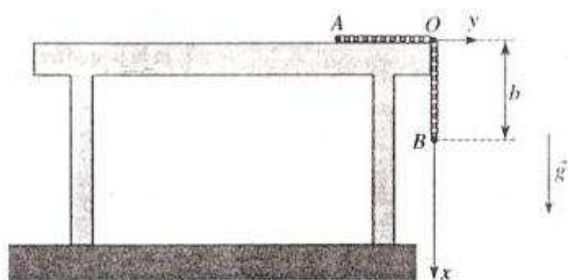
On donne le moment d'inertie de la barre par rapport à sa médiatrice $J = \frac{1}{3}mb^2$.

★ Exercice 5 : Mouvement d'une chaîne sur une table

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une chaîne AB homogène sans raideur, de longueur d et de masse m , est posée sur le bord d'une table horizontale, sans vitesse initiale, son extrémité B se trouvant à une distance b du bord de la table.

On néglige tout frottement interne à la chaîne d'une part, et entre la table et la chaîne d'autre part.

On étudie la chute de la chaîne avant que son extrémité B n'atteigne le sol.



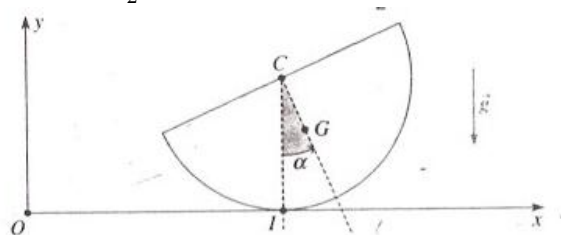
- 1) En utilisant une méthode énergétique, déterminer l'équation différentielle que vérifie l'abscisse x de l'extrémité B de la chaîne sur l'axe vertical (Ox) à un instant t (on supposera $x < d$). En déduire la loi $x(t)$.
2. Déterminer à un instant t , la force $\vec{R}$ qu'exerce la table sur la chaîne.

★ Exercice 6 : Oscillations d'un demi-disque sur un plan horizontal

On considère un demi-disque (D) homogène, de centre C, de centre de masse G, de rayon R et de masse m .

Le référentiel terrestre $(0, x, y, z)$ est supposé galiléen. Tout en restant dans le plan vertical (Oxy), (D) se déplace sans frottements sur le plan horizontal (Oxz). On désigne par I le point de contact entre le sol et (D), et on repère la position de (D) par l'abscisse x de son centre C et par l'angle $\alpha = (\vec{CI}, \vec{CG})$. À l'instant initial, on lâche le demi-disque sans vitesse initiale dans la position $\alpha = \alpha_0$.

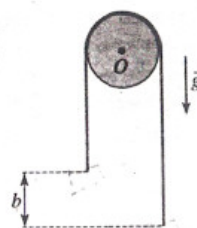
On donne $CG = b = \frac{4R}{3\pi}$. Le moment d'inertie de (D) par rapport à un axe passant par C et perpendiculaire à (D) vaut $J = \frac{1}{2}mR^2$.



1. En appliquant le théorème de la résultante dynamique exprimer la vitesse $\vec{v}(G)$ du centre de masse G en fonction de b , α et $\dot{\alpha}$.
2. Calculer l'énergie cinétique E_K de (D) en fonction de J , m , b , et $\dot{\alpha}$.
3. Écrire une intégrale première du mouvement ; puis, établir une équation différentielle du second ordre en α .
4. On suppose α_0 petit ; linéariser l'équation obtenue et en déduire la période T des petites oscillations de (D) ; autour de sa position d'équilibre. Exprimer T d'abord en fonction de J , R , b , m et de l'intensité de la pesanteur g , puis en fonction de R et g uniquement.

★ Exercice 7 : Mouvement d'une corde sur une poulie

Une corde homogène sans raideur, de masse m et de longueur a est posée sur une poulie de masse M , de rayon R et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}MR^2$ par rapport à son axe horizontal fixe, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



À l'instant initial, le système est immobile, et les deux extrémités de la corde présentent une différence d'altitude. Déterminer le mouvement ultérieur du système en supposant que la corde ne glisse pas sur la poulie (et en supposant que la corde reste toujours en contact avec la poulie).