T.D N°1 d'électromagnétisme

révision

12-04-2009

⋆ **Exercice 1 :Distribution surfacique en $cos\theta$**

On considère la superposition de deux distributions de charge caractérisées par des charges volumiques uniformes de valeurs respectives ρ_0 et $-\rho_0$.ces charges sont réparties dans deux sphères de rayon R dont les rayons sont distants de $a << R$. Montrer que cette distribution est équivalente à une distribution surfacique dont on calculera la densité en fonction de $\rho_0, aet\theta = (\overrightarrow{e}_z, \overrightarrow{e}_r)$

⋆ **Exercice 2 :Champs électrostatique crée par une distribution volumique radiale, en 1/r et écrantée**

On considère une distribution volumique de charge, à symétrie sphérique, de la forme :

$$\rho(r) = \frac{q}{4\pi a^2 r}\exp(-\frac{r}{a})$$

1. Trouver le champ électrostatique radial produit par cette distribution.
2. Quelle est la charge contenue dans la sphère, centrée à l'origine et de rayon r ? que devient cette charge lorsque r tend vers 0 et lorsque r tend vers l'infini ?

⋆ **Exercice 3 :Champs électrostatique crée par une distribution volumique écrantée**

1. Quel est le champ électrostatique radial produit par une distribution volumique de charge, à symétrie sphérique, de la forme : $\rho(r) = \rho_0\exp(-\frac{r}{a})$, en un point M, situé à la distance R de l'origine ?
2. Étudier le cas où R est très grande devant a.

⋆ **Exercice 4 :Pénétration d'une particule dans u gaz chargé**

La région $|z| < \frac{a}{2}$ représentée sue la figure par l'inéquation contient des charges électriques ponctuelles identiques q uniformément réparties avec une densité particulaire n.

1. Etablir, en fonction de z, les expressions du champ et de potentiel crées par cette distribution.
2. Une particule, de même charge q, située initialement en un point I de l'axe Oz, de coord. $-d$, pénètre dans le plasma suivant l'axe Oz. Quelle doit être la valeur maximale de son énergie cinétique initiale pour que la particule puisse traverser le plasma.

⋆ **Exercice 5 :énergie électrostatique d'un système symétrique de charges élémentaires**

1. Calculer l'énergie électrostatique d'un système à quatre électrons régulièrement espacés sur un cercle de rayon r au centre du quelle se trouve un proton.
2. Si on abandonne un tel système, comment varie r ?

⋆ **Exercice 6 :modèle quantique de l'atome d'hydrogène La théorie quantique**

1. établir que la charge électronique d'un atome d'hydrogène dans l'état fondamental est répartie autour du proton avec une densité $\rho_e = A\exp(-2\frac{r}{a})$ où A est une cste et a le rayon de bohr $a = 0,53pm$
2. Déterminer A sachant que la primitivité de $u^2\exp(-u)$ est$-(u+2u+2)\exp(-u)$.
3. Calculer le champ et le potentiel électrostatiques crées par cet atome.
4. Discuter les cas extrêmes où $\frac{r}{a} >> 1$ et$\frac{r}{a} << 1$

⋆ **Exercice 7 :champ et potentiel électrostatique crées par une double couche sphérique**

On considère la dist. De charges formée par une sphère (rayon R_1), de charge Q répartie uniformément en volume, entourée par une couche sphérique (rayon R_2 et R_3 , tels que $R_1<R_2<R_3$),de charge -Q répartie uniformément en volume. Calculer le champ et le potentiel en tout point de la distribution.

⋆ **Exercice 8 :Potentiel de Yukawa**

On considère une distribution de charge ayant la symétrie sphérique autour d'un point fixe O. Le potentiel est donné à une distance r par l'expression (Potentiel de Yukawa) :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp -\frac{r}{a}$$

(q et a sont des constantes positives)

1. Calculer le champ E à une distance r de O ; examiner les cas particuliers $r << a$ et $r >> a$; quelle est la signification de a ?
2. Calculer le flux $\Phi(r)$ sortant d'une sphère de rayon r et en déduire que la distribution de charges est équivalente à une charge ponctuelle placée en O et à une répartition volumique de charges caractérisée par $\rho(r)$, que l'on déterminera.

⋆ **Exercice 9 :EFFET MEISSNER**

Un modèle microscopique de la conduction électrique dans un matériau supraconducteur conduit à poser, dans la jauge de COULOMB, l'équation de LONDON. Celle-ci relie le vecteur densité de courant volumique $\overrightarrow{j}$ et le

potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ en un point du milieu : $\overrightarrow{j} = -\frac{\overrightarrow{A}}{\mu_0 \lambda^2}$. Ou $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}}$ est la constante de LONDON du matériau (n charges q, de masse m par unité de volume).

1. Quelle est la dimension de λ ? donner sa valeur numérique pour : $n = 10^2 9 m^{-3}$; $q = -1,6.10^{-19} C$;$m = 9,1.10^{-31} kg$; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$.
2. Une plaque supraconductrice est plongée dans un champ magnétique uniforme : $\overrightarrow{B_0} = B_0 \overrightarrow{e_x}$.
   Cette plaque occupe la zone($-d \leq z \leq d$). Le champ magnétique à l'extérieur de la plaque n'est pas modifié par la présence de celle-ci.
   (a) Etablir l'équation traduisant les variations du champ magnétique au sein du matériau supraconducteur.
   (b) En déduire la répartition du champ magnétique lorsque la plaque est présente et représenter Les variations de son amplitude en fonction de l'abscisse z pour $d = \lambda$ et pour $d = 10\lambda$.
   (c) Quelle est la densité volumique de courant électrique $\overrightarrow{j}$ dans le matériau ? Représenter les variations de son amplitude en fonction de z pour $d = \lambda$ et pour $d = 10\lambda$. Le résultat obtenu permet-il de comprendre que la plaque ne modifié pas la valeur du champ en dehors de celle-ci ?
   (d) Pour une plaque d'épaisseur $2d = 1mm$, que peut-on dire de la répartition de champ et de Courant au sein de matériau ? Proposer une modélisation plus simple, à expliciter, de la situation obtenue.

⋆ Exercice 10 :SPHÈRE SUPRACONDUCTRICE PARFAITE

Une bille supraconductrice, de rayon a, est placée dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_0} = B_0 \overrightarrow{e_z}$. A l'intérieur du supraconducteur parfait(la longueur de LONDON est négligeable). Le champ magnétique est nul.

1. On se propose de déterminer le champ magnétique autour de la bille.
   (a) Préciser les équations et conditions aux limites caractérisant le champ à l'extérieur de la bille.
   (b) Montrer que la superposition au champ $\overrightarrow{B_0}$ du champ crée par un dipôle $\overrightarrow{M}$ à préciser, permet de réaliser des conditions identiques dans la zone(r > a).
   (c) En déduire la répartition du champ magnétique autour de la sphère supraconductrice.
2. Donner l'allure des lignes du champ de $\overrightarrow{B}$, à l'extérieur de la sphère.
3. (a) Quelle est la répartition de courant obtenue sur la sphère supraconductrice ?
   (b) Etablir, à partir de cette répartition, le moment magnétique de la sphère. Le résultat est-il surprenant. **⋆ Exercice 11 :dipôle dans un champ uniforme**
   On suppose un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}_a = E_a \overrightarrow{e}_z$ est le champ d'un dipôle de moment $p\overrightarrow{e}_z$ placé à l'origine des coord.
   i. À quelle condition le champ résultant présent-il une équipotentielle sphérique ?
   ii. Trouver le rayon de cette équipotentielle.

⋆ Exercice 12 :interactions dipolaires

Un dipôle de moment $\overrightarrow{p}_1 = p_1 \overrightarrow{e}_z$est placé à l'origine des coord O. au point de coord $(0;0;a)$ .on place un dipôle de moment $\overrightarrow{p}_2$.

i. calculer la force qui s'exerce sur $\overrightarrow{p}_2$dans les deux cas suivants : $\overrightarrow{p}_2 = p_2 \overrightarrow{e}_z$ et $\overrightarrow{p}_2 = p_2 \overrightarrow{e}_x$
ii. Même question pour $\overrightarrow{p}_1 = p_1 \overrightarrow{e}_X$?

⋆ Exercice 13 : Dipôle électrostatique dans le vide

Pour toutes les applications, on suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé galiléen Oxyz dont les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz sont notés respectivement $\overrightarrow{u_x}$,$\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$. A un point M quelconque, on associe des coordonnées cartésiennes x, y et z ainsi que le vecteur $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ = r $\overrightarrow{u_r}$, r étant la norme de . On considère un ensemble de deux charges ponctuelles fixes : -q en N (0, 0,-a/2) et +q en P (0, 0,a/2), a et q étant des quantités positives.

i. Donner l'expression du moment dipolaire électrique de cette distribution de deux charges, en fonction de q, de a et de $\overrightarrow{u_z}$.
ii. Calculer le potentiel électrostatique créé par ce dipôle en un point M, situé à très grande distance du dipôle (r » a). (On utilisera les coordonnées sphériques r, θ, φ avec $\theta = (\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{u_r})$.
iii. En déduire les composantes (en coordonnées sphériques) du champ électrostatique créé par ce dipôle. Trouver une relation exprimant le vecteur champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en fonction de et $\overrightarrow{p}$.
iv. Déterminer l'équation des lignes de champ sous la forme d'une relation entre r et l'angle θ.

v. Le dipôle (toujours rigide) est maintenant plongé dans un champ électrostatique extérieur .Quelles sont les actions subies par ce dipôle ? (On pourra donner les expressions sans démonstrations).

vi. **Application** :
Une molécule polarisable plongée dans un champ électrique acquiert un moment dipolaire induit $\overrightarrow{p} = \alpha\epsilon_0\overrightarrow{E_{ext}}$. On considère un dipôle $\overrightarrow{p_1} = p_1\overrightarrow{u_z}$ placé en O et une molécule polarisable placée en M avec $\overrightarrow{OM} = z_M\overrightarrow{u_z}$. Exprimer en fonction de la force exercée par le dipôle sur la molécule, préciser si cette force est attractive ou répulsive.

II- CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE ⋆ **Exercice 14 :Répartition des charges entre deux sphères conductrices reliées par un fil métallique :**
Deux sphères métalliques, de rayons R_1 et R_2, distantes de Dtrés supérieur à R_1 et R_2, portent respectivement les charges Q_0 et 0. Trouver leurs charges à l'équilibre ainsi que les champs électrostatiques qu'elles produisent dans leur voisinage lorsqu'on les relie par un fil métallique.

⋆ **Exercice 15 :Répulsion de deux hémisphères chargés**
Une sphère chargée, de rayon R=10cm, est divisée suivant un plan diamétral en deux hémisphères chargés. Entre ces deux hémisphères laissés en contact, s'exerce une force de 0,9N. quel était le potentiel auquel était portée la sphère ? Quelle était son énergie électrostatique ?

⋆ **Exercice 16 :Conducteurs sphériques concentriques :**
Une coquille sphérique conductrice, de rayon extérieur et intérieur R_1 et R_1', entoure une sphère conductrice concentrique de rayon R_2 :$R_2 < R_1' < R_1$. La sphère porte une charge Q_2 et la coquille une charge totale Q_1. Calculer le potentiel des deux conducteurs. En déduire les coefficients de capacité.

⋆ **Exercice 17 :Calotte sphèrique conductrice entourant une sphère conductrice :**
Une sphère conductrice S_1, de rayon $R_1 = 0,2m$, est portée au potentiel $V_1 = 1MV$. on l'entoure d'une calotte sphèrique conductrice S_2, concentrique, de rayon intérieur $R_2 = 1m$, d'épaisseur e=1cm et reliée au sol.

i. Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace.

ii. Quelles sont les charges Q_1 et Q_2 portée par S_1 et S_2 ? Comparer Q_1 à $Q_0 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_1$.

⋆ **Exercice 18 :Coefficients de capacité d'un système de deux sphères conductrices :**
Deux sphères conductrices, de rayon R_1 et R_2, ont leurs centres distants de d avec $d \gg R_1$ et R_2.

i. Calculer les coefficients D_{ij} de la matrice [D]du système.

ii. En déduire la matrice[C]. Comparer C_11 à la capacité d'une sphère seule.

⋆ **Exercice 19 :Capacité mutuelle de deux conducteurs :**
On appelle capacité mutuelle d'un système de deux conducteurs C_1 et C_2, de charge totale nulle ($Q_1 + Q_2 = 0$), la quantité $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$. Calculer C en fonction des coefficients de capacité C_{ij}. On dit que C_2 est influencé totalement par C_1 si $C_{12} = -C_{11}$. Quelle est alors la valeur de C ? ***III- CONDENSATEURS***

⋆ **Exercice 20 :Condensateur cylindrique :**
On considère un condensateur cylindrique formé de deux conducteurs coaxiaux 1 et 2, de rayons respectifs R_1 et R_2 L'armature 2 externe est fixe alors que l'armature 1 interne peut avoir un mouvement de translation suivant l'axe vertical ascendant Ox.

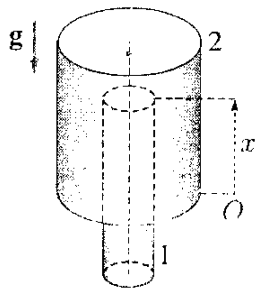

FIG.2 :Condensateur cylindrique.

i. En négligeant les effets de bord, donner l'expression de la capacité C(x)en fonction du paramètre x de pénétration de 1 dans 2.

ii. On maintient entre les armatures une différence de potentiel U. Quel doit être la valeur U_0 De U pour que l'armature interne, de masse m, soit en équilibre ?Cet équilibre est-il stable ?

iii. En imposant $x = x_0$, le condensateur est chargé sous une d.d.p U_0, puis isolé. Quelle doit être la force supplémentaire F_{op} que l'on doit exercer sur l'armature 1 pour la maintenir en équilibre ?

⋆ **Exercice 21 :Bilan énergétique d'un condensateur plan à armature mobile :** Un condensateur plan est constitué de deux armatures rectangulaires dont l'une 1 de charge Q > 0, est fixe et l'autre 2 se déplace sans frottement sous l'action d'une masse M(voir figure). La poulie a une masse négligeable et le fil reliant 2 à la masse est inextensible.

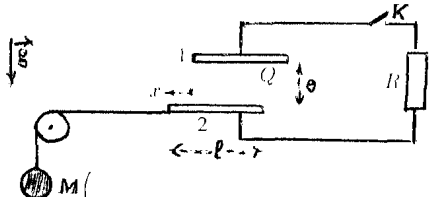

FIG.3 :condensateur plan à armature mobile.

i. Calculer la capacité du condensateur plan en fonction de X=l-x, x caractérisant le déplacement de 2.

ii. Le condensateur est isolé avec une charge Q (l'interrupteurK est ouvert). Donner l'expression De l'énergie potentielle totale du système en fonction deX. En déduire la relation entre Q et X à l'équilibre.

iii. Montrer que la d.d.p U aux bornes du condensateur est indépendante de Q.

iv. La charge Q étant égale à celle Q_0 pour laquelleX à l'équilibre vaut l, on ferme alors K qui Relie le condensateur à un résistor R. Trouver X(t),C(t),Q(t) et $\frac{dQ}{dt}$ lorsque l'armature 2 se déplace avec un mouvement de translation rectiligne uniforme, de vitesse v_0 par rapport au reste du système. Quel est le courant I dans le résistor ?

v. Effectuer le bilan énergétique entre les instants initial ou x=0 et final ou x=l.