Électromagnétisme

T.D N°3 d'électromagnétisme

Équations de MAXWELL & Bilan énergétique

⋆ Exercice 1 :Différents aspects du courant de déplacement :

1. Une sphère radioactive de rayon R émet des particules chargées de façon isotrope. On note Q(r,t) la charge intérieure à une sphère de rayon r>R à l'instant t. Déterminer l'expression du courant de déplacement $\overrightarrow{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ en un point extérieur à la sphère radioactive. Vérifier la cohérence des résultats avec l'équation de Maxwell - Ampère.
2. On considère un condensateur plan constitué de deux plateaux circulaires de rayon R. Ce condensateur est relié au reste du circuit par des fils que l'on supposera parfaitement conducteurs. La charge $\pm Q$ des plateaux varie assez lentement pour que l'on puisse, en première approximation, considérer que le champ électrique intérieur aux plateaux à la même expression que dans le cas du régime statique. On négligera les effets de bord. Que valent les courants de déplacement à l'extérieur et à l'intérieur des plateaux ? montrer qu'il a continuité du champ magnétique à la traversée d'un plateau.

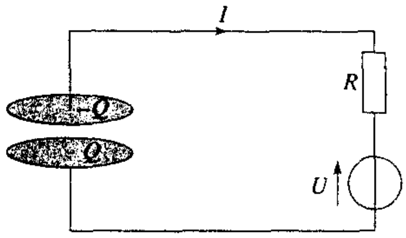
⋆ Exercice 2 :Évolution d'une distribution de charges dans un métal :

Une sphère de rayon R présente à l'instant t=0, une distribution volumique uniforme de charges électriques de densité ρ_0. La conductivité électrique du métal est notée γ.

1. Montrer que cette distribution de charges ne peut rester dans cet état. Préciser les caractéristiques du vecteur densité volumique de courant électrique $\overrightarrow{j}$.
2. Vers quel état final va évoluer le système ? Caractériser quantativement la distribution finale de charges.
3. On se propose de déterminer la loi d'évolution temporelle de $\rho(t)$. Pour cela, on suppose dans un premier temps que la loi d'Ohm locale $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$ est valable à tout instant. Montrer, en utilisant une des équations de Maxwell associé à la conservation de la charge électrique, que $\rho(t)$ varie exponentiellement dans le cadre de ce modèle. On précisera le temps caractéristique τ_0.
4. En fait, la relation précédente n'est valable qu'en régime permanent. en régime transitoire il faut en effet écrire $\tau\frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} + \overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$. Le modèle de Drude donne l'expression de la conductivité $\gamma = \frac{n_e e^2 \tau}{m}$ ou e représente la valeur absolue de la charge de l'électron, m la masse d'un électron et n_e la densité particulaire électronique.
   Le cuivre, de conductivité $\gamma = 6 \times 10^7 S.m^{-1}$, de masse molaire $M = 63,5g.mol^{-1}$ et de masse volumique $\mu = 8900kg.m^{-3}$ libère deux électrons par atome.
   En déduire une estimation du temps de relaxation τ. Etablir dans ce modèle l'évolution de la densité volumique de charge en fonction du temps.
   On introduira la pulsation plasma$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}}$.
   Données :
   - valeur absolue de la charge de l'électron $e = 1,602 \times 10^{-19}C$,
   - Masse de l'électron $m = 9,1 \times 10^{-31}kg$,
   - Nombre d'Avogadro $N = 6,02 \times 10^{23}mol^{-1}$.

⋆ Exercice 3 :bilan énergétique associé à un condensateur :

Le condensateur du circuit électrique représenté ci-contre est constitué de deux disques métalliques, d'axe (Oz) et de rayon a, distants de e. Le système fonctionne dans le cadre de l'A.R.Q.P. et on négligera tout effet de bord.

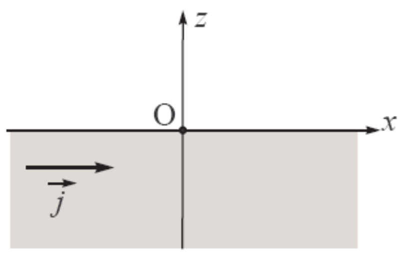


1. Quelles sont les valeurs des champs électrique et magnétique à l'intérieur du condensateur ?
2. En comparant les ordres de grandeur des termes électrique et magnétique de l'énergie volumique, indiquer la valeur de l'énergie électromagnétique stockée par le condensateur.
3. Calculer le vecteur de POYTING associé, puis le flux d'énergie électromagnétique à travers les" parois " du condensateur, constituées par le cylindre d'axe(Oz), de rayon a et de hauteur e.
4. Vérifier sur cet exemple l'écriture du théorème de PONYTING.

⋆ **Exercice 4 :câble coaxial en régime statique :**
Un câble coaxial est constitué de deux cylindres minces c_1 et c_2 parfaitement conducteurs de rayons R_1 et R_2, avec $R_2 > R_1$, et de même axe(Oz). Les phénomènes étudiés ici sont à symétrie de révolution autour de l'axe(Oz). L'âme c_1, au potentiel V_1, porte une charge linéique λ, est parcourue par le courant I. L'âme c_2, au potentiel V_2. Elle porte une charge linéique $-\lambda$, est parcourue par le courant -I. On note $U = V_1 - V_2$.

1. Calculer les charges surfaciques sur σ_1 et σ_2, puis le champ $\overrightarrow{E}$ en tout point et la densité Linéique d'énergie électrique $\frac{dW_E}{dz}$.
   En déduire la capacité linéique Γ du câble coaxial (en n'oubliant pas que l'énergie d'un condensateur de capacité C portant une charge Q est égale à $W_E = \frac{Q^2}{2C}$.
2. Calculer les courants surfaciques sur c_1 et c_2, puis le champ $\overrightarrow{B}$ en tout point et la densité Linéique d'énergie magnétique $\frac{dW_B}{dz}$; en déduire l'inductance linéique Λ du câble coaxial(en n'oubliant pas que l'énergie d'une inductance L parcourue par un courant I est égale à $W_B = \frac{LI^2}{2}$.
3. Quelle est la valeur du produit $\Gamma\Lambda$? quelle impédance Z_c, à exprimer en fonction de R_1 et R_2, Peut-on former avec Λ et Γ ?
4. Calculer le vecteur de POYTING $\overrightarrow{\pi}$ dans le câble coaxial, ainsi que le flux Φ d'énergie électromagnétique dans le câble. Montrer que ce flux se met sous la forme $\Phi = UI$. Commenter

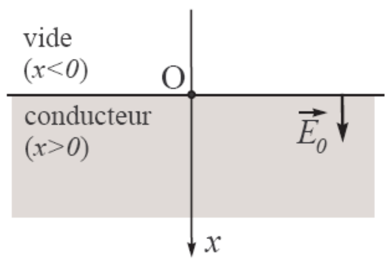
⋆ **Exercice 5 :Conducteur dans l'ARQS**
Un conducteur linéaire, de conductivité γ, occupe le demi-espace défini par z < O. On étudie dans ce matériau les conséquences d'un courant sinusoïdal de densité de courant $\overrightarrow{j} = J(z)cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$. On pourra utiliser la notation complexe (on note $\underline{\overrightarrow{E}}$ le complexe associé au champ réel $\overrightarrow{E}$).



1. Donner l'expression de $\overrightarrow{E}$.
2. On se place dans l'ARQS. À partir de symétrie et des invariances, montrer que :
   (a) $\overrightarrow{B}$ est porté par $\overrightarrow{e_x}$
   (b) $\overrightarrow{B}$ ne dépend que de z et de t.
3. Rappeler les équations de MAXWELL dans l'ARQS.
4. Déterminer $\overrightarrow{B}(z,t)$.
5. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{j}(z)$ ainsi que celle vérifiée par $\underline{E}(z)$ et $\underline{B}(z)$.
6. Déterminer les solutions de l'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente et mettre en évidence une longueur caractéristique de la variation spatiale des grandeurs $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.
7. Déterminer la loi $\overrightarrow{j}(z,t)$ et interpréter le résultat en particulier en étudiant la variation de j avec la distance au plan Oxy à un instant donné.

⋆ **Exercice 6 :**Théorème de POYNTING
1. En faisant un bilan d'énergie électromagnétique pour un volume V quelconque limité par une surface fermée S dans lequel règne un champ électomagnétique, établir l'équation locale de conservation de l'énergie :
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E} + div\overrightarrow{\pi} = 0$$
   Interprétation de chacun des termes.
2. En utilisant les équations locales de MAXWELL, en déduire l'équation locale de POYNTING (ou théorème de POYNTING).
3. Soit un fil cylindrique conducteur de conductivité γ, de rayon R, d'axe Oz parcouru par l'intensité constante I, le courant étant réparti de manière uniforme.
   Montrer qu'en un point de la périphérie, le vecteur de POYNTING s'écrit, dans la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ sous la forme : $\overrightarrow{\pi} = -\frac{I^2}{2\gamma\pi^2R^3}\overrightarrow{e_r}$
4. Calculer la puissance électromagnétique rayonnée à travers la surface d'une portion de hauteur h de ce cylindre conducteur.
5. En déduire la résistance électrique d'une telle portion de conducteur.

⋆ **Exercice 7 :Conducteur en régime stationnaire et Charge surfacique**
1. On considère un conducteur dont le champ électrique satisfait en régime stationnaire à l'équation difféÊ rentielle : $\Delta\overrightarrow{E} - \frac{\overrightarrow{E}}{\lambda_D^2} = \overrightarrow{0}$, où λ_D est une grandeur caractéristique du matériau.
   Quelle est l'unité de cette grandeur ?
   La surface du conducteur est supposée plane et l'axe (Ox) est choisi selon sa normale.



(a) De quelle(s) variable(s) dépend le champ électrique ? Quelles sont les conditions aux limites ?

(b) Trouver la répartition spatiale du champ électrique, puis celle de la charge volumique ρ, lorsque le champ extérieur dans le vide au voisinage de cette surface vaut $E_0\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_x}$ étant le vecteur unitaire porté par l'axe (Ox). On admettra que, loin de cette surface, le champ à l'intérieur tend vers zéro.

(c) Donner une interprétation physique de λ_D.

(d) Déterminer la charge volumique ρ_o sur la surface du conducteur en fonction de E_0, λ_D et ε_0.

2. λ_D est de l'ordre de quelques nanomètres pour un conducteur usuel : pour un échantillon de taille macroscopique, il est alors commode d'introduire la charge surfacique σ du conducteur. Exprimer σ en fonction de ρ_0 et de λ_D, puis en fonction de E_0 et de ε_0.
   Conseil : on peut calculer la charge surfacique à partir de sa définition ou des relations de continuité du champ électrique.

⋆ **Exercice 8 :Câble coaxial :**

Un câble coaxial cylindrique d'axe (Oz), de rayon intérieur a et de rayon extérieur b est le siège d'un champ électromagnétique dont les champs électriques et magnétiques sont, en coordonnées cylindriques $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}(M,t) = E(r)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_r} \\ \overrightarrow{B}(M,t) = \overrightarrow{B_o}(r)\cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

avec $\omega = ck$,ou c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Les cylindres de rayons a et b sont des conducteurs parfaits : les champs électrique et magnétique sont nuls pour r > b et pour r < a. L'espace situé entre les cylindres de rayon a et b est le vide.

1. Calculer E(r) en utilisant l'équation de MAXWELL-Gauss et les conditions aux limites. On posera : $E_a = \lim_{r\to a^+} E(r)$.
2. Montrer que $\overrightarrow{B_o}(r) = \frac{E_a a}{cr}\overrightarrow{e_\theta}$. On donne : $\overrightarrow{rot}(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda.\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a} + \overrightarrow{grad}\lambda \times \overrightarrow{a}$.
   Conseils : Quelle équation de MAXWELL utiliser ? Quelle est la valeur de $\overrightarrow{rot}(\frac{\overrightarrow{e_r}}{r})$?
3. (a) Utiliser les relations de continuité des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ pour déterminer les densités surfaciques de charge $\sigma_a(z,t)$ et de courant $\overrightarrow{j}_{sa}(z,t)$ sur l'armature cylindrique r = a.
   (b) De même, déterminer les densités surfacique $\sigma_b(z,t)$ et $\overrightarrow{j}_{sb}(z,t)$ sur l'armature cylindrique r = b.
   (c) vérifier que
   $$\frac{\partial\sigma_{a/b}}{\partial t} + \frac{\partial\overrightarrow{j}_{sa/b}}{\partial z} = 0$$
   Interprétation physique de cette équation pour r = a par exemple ? Pour répondre à cette question, faire une bilan de charges entre les instants t et t + dt pour la portion de conducteur cylindrique r = a comprise entre les côtes z et z + dz.
4. En utilisant (entre autre) la relation donnée à la question 2) , déterminer le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}(r,z,t)$ et le potentiel scalaire V(r,z,t) dont dérive le champ électromagnétique entre les conducteurs. On supposera que $\overrightarrow{A} = A(r,z,t)\overrightarrow{e_z}$ et on montrera que $A(r,z,t) = \frac{a}{c}ln(\frac{r}{b})E_a cos(\omega t - kz)$.
5. Soit U(z,t) = V(a,z,t) le potentiel du conducteur intérieur à l'abscisse z et à l'instant t et I(z,t) l'intensité du courant électrique porté par ce même conducteur.
   Montrer que $Z_c = \frac{U(z,t)}{I(z,t)}$ est indépendant de z et de t. Donner son expression.
6. Déterminer le vecteur de POYNTING à l'intérieur du câble coaxial.
   On définit la puissance moyenne transférée à travers une section droite de ce câble de le manière suivante :
   $$P_m = \int_{r=a}^{b}\int_{\theta=0}^{2\pi} < \overrightarrow{\pi} > .\overrightarrow{dS}$$
   . Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de Z_c. Commenter.