Électromagnétisme

T.D N°6 d'électromagnétisme

Propagation des ondes EM

Applications :

Application 1 :Propriétés d'une OPPM

Une onde plane est décrite par l'expression suivante : $\psi = 5exp - i(\omega t - 3x - 4y - 5z)$ La pulsation ω est liée au module k du vecteur d'onde par : $\omega.k = 2.10^3$ en SI.

1. Calculer la longueur d'onde, la fréquence temporelle, la fréquence spatiale et la vitesse de propagation de cette onde.
2. Déterminer la direction de propagation de cette onde.

Application 2 : Equation d'onde de D'Alembert

Trouver les équations de propagation d'une OEM dans le vide. Montrer que les deux composantes, électrique et magnétique, de cette onde se propagent à la vitesse de la lumière $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

Application 3 : Propagation d'une OEMPP

Dans une espace vide illimité, de permittivité ε_0 et de perméabilité μ_0, le champ électromagnétique d'une onde plane en un point M(x,y,z)de l'espace rapporté au référentiel galiléen Oxyz de base($\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z$), ne dépendent que la variable Z et du temps t.

1. Ecrire 8 relations aux dérivées partielles liant les composantes des champs E et Bde cette onde. En déduire que $E_z = B_z = 0$.
2. On admet que les champs E et Bde l'onde sont liés par la relation matricielle :
$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \qquad (1)$$
Déterminer, en fonction de ε_0 et μ_0 , les coefficients réels a_1, a_2, a_3 et a_4 de la matrice liant les champs E et B.
3. Calculer, en fonction de ε_0 et μ_0, le rapport des modules des champs E et B.
4. Etablir la relation $a_2 + a_3 = 0$. En déduire que les champs E et B sont orthogonaux.
5. L'onde plane au point M est représentée par le champ magnétique $\overrightarrow{\underline{B}} = \underline{B}_0 expi(\omega t - k_0 z)\overrightarrow{e}_y$ avec k_0 est réel positif ou négatif. Déterminer dans chacun des deux cas envisageables la vitesse de phase de l'onde ainsi que les champs E et B en notation réelle.

Application 4 : Structure d'une OEMPPM

Considérons une OEMPPM se propageant dans le vide.

1. En utilisant la notation complexe $\overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{\underline{E}}_0 expi(\omega t - \overrightarrow{k}_0.\overrightarrow{r})$, traduire les 4 équations de Maxwell dans le vide.
2. Etablir à partir de celles-ci la relation entre la pulsation ω et le module du vecteur d'onde k_0.
3. Montrer que ces équations permettent de retrouver toute la structure de l'onde considérée.

Exercices :

⋆ Exercice 1 :Aspect énergétique d'une OEMPPM

$$\begin{cases} \overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{\underline{E}}_0 expi(\omega t - \overrightarrow{k}_0.\overrightarrow{r}) \\ \overrightarrow{\underline{B}} = \overrightarrow{\underline{B}}_0 expi(\omega t - \overrightarrow{k}_0.\overrightarrow{r}) \end{cases}$$

On considère une OEMPPM se propageant dans le vide, dans la direction $\overrightarrow{u}$.

1. Donner la densité volumique d'énergie électromagnétique de cette onde et montrer qu'on l'exprimer soit en fonction de E soit en fonction de B.
2. Déterminer la moyenne temporelle de cette densité d'énergie et l'exprimer en fonction de E_0
3. Les ondes électromagnétiques ont généralement des fréquences élevées($> 10^4 Hz$). Les détecteurs ne sont souvent sensibles qu'aux valeurs moyennes temporelles de la puissance électromagnétiques qu'ils reçoivent. Ces valeurs moyennes sont donc les seuls susceptibles de nous intéresser.
4. Déterminer la moyenne temporelle de la puissance électromagnétique P traversant une surface S perpendiculaire à la direction de propagationu d'uneOEMPPM. En déduire la vitesse v_e de propagation de l'énergie électromagnétique dans le vide.

Rappel :

en faisant correspondre à $A(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_1)$ le nombre complexe $\underline{A}(t) = \underline{A}_m expi\omega t$ avec $\underline{A}_m = A_m expi\varphi_1$et à $B(t) = B_m \cos(\omega t + \varphi_2)$ le nombre complexe $\underline{B}(t) = \underline{B}_m expi\omega t$ avec $\underline{B}_m = B_m expi\varphi_2$, rappelons que la valeur moyenne du produit à A(t).B(t) est égale à [en notant $B^*(t)$le complexe conjugué de B (t)] :
$< A(t).B(t) >= \frac{1}{2}Re(A(t)B^*(t)) = \frac{1}{2}Re(A_m.B_m^*) = \frac{1}{2}Re(A_m.B_m expi(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{1}{2}A_m.B_m cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.
De même, si A(t)et B(t) sont des grandeurs vectorielles [$\overrightarrow{A}(t)$au lieu de A(t)et $\overrightarrow{B}(t)$au lieu deB(t)] :
$< A(t) \wedge B(t) >= \frac{1}{2}Re(\overrightarrow{A}(t) \wedge \overrightarrow{\underline{B}}^*(t)) = \frac{1}{2}Re(\overrightarrow{\underline{A}}_m \wedge \overrightarrow{\underline{B}}^*_m) = \frac{1}{2}Re(\overrightarrow{A}_m \wedge \overrightarrow{B}_m expi(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{1}{2}A_m \wedge B_m \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

⋆ Exercice 2 : Polarisation de l' OEMPPM

Considérons une OEMPPM se propageant dans la direction de l'axe Oz, ayant un champ électrique dont les composantes E_x, E_y et E_z sont telles que :

$$\begin{cases} E_x = E_{xo} cos(kz - \omega t + \varphi_1) \\ E_y = E_{yo} cos(kz - \omega t + \varphi_2) \\ E_Z = 0 \end{cases}$$

Etudier la polarisation de cette onde.

⋆ Exercice 3 :Champs électriques associés à des ondes polarisées

Donner les expressions complexes des champs électriques associés aux ondes polarisées suivantes :

1. Onde polarisée rectilignement se propageant suivant l'axe Ox , le champ électrique faisant un angle de 60°C avec l'axe Oy.
2. Onde polarisée elliptiquement à droite se propageant suivant l'axe Oy ; le grand axe de l'ellipse étant suivant l'axe Oz, trois fois plus grand que le petit axe, et le déphasage étant $\pi/2$.
3. Onde polarisée rectilignement suivant l'axe Oy se propageant suivant une direction qui fait, dans le plan(zOx), un angle de 45° avec l'axe Oz.

⋆ **Exercice 4 : Synthèse**

Une OEMPPM de pulsation ω se propage dans le vide dans le vide dans une direction parallèle au plan(xOy) faisant un angle θ ave l'axe Ox. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ de cette onde plane, polarisée rectilignement suivant la direction Oz de vecteur unitaire $\overrightarrow{e}_z$, s'écrit en notation complexe au point M(x,y,z)à l'instant t : $\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E}}_0 expi(\omega t - ax - by).\overrightarrow{e}_z$

1. Etablir l'équation de propagation du champ E dans le vide. En déduire la relation liant a,b,ω et c_0. Que représente les coefficients a et b ?Déterminer, en fonction de a et b, la longueur d'onde λ_0 et l'angle θ.
2. Exprimer le vecteur de champ magnétique $\overrightarrow{B}(x, y, z)$ de l'onde considérée. Que peut-on dire des directions des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en chaque point ? Calculer l'impédance caractéristique du vide Z_0 définie par le rapport des amplitudes du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et de champ $\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}$ de l'onde considérée.
3. Déterminer les composantes du vecteur de PoyntingI $\overrightarrow{\pi}(x, y, t)$ et la valeur moyenne temporelle de son module.
4. Calculer la valeur moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde.
5. Déduire des résultats obtenus la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique.
6. Calculer les amplitudes des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ d'un faisceau laser, de section circulaire, de diamètre d égal à 2mm, dont la puissance transportée est P=0,6kW.

⋆ **Exercice 5 :Propagation de l'énergie dans une onde plane progressive**

on désigne par o.p.u.s une onde éléctrotromagnétique, plane, progressive, polarisée rectilignement et sinusoïdale de pulsation ω, de fréquence f, de longueur d'onde dans le vide λ. de plus, toutes les ondes électromagnétiques considérées se propagent dans le vide (en l'abscence de charge et de courant) caractérisé par les constantes $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}.10^{-3}MKSA$ et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}MKSA$.
l'espace est rapporté à un tiédre orthonormé direct Oxyz de vecteurs $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$. Une o.p.u.s se propage dans la direction Ou du plan xOy faisant avec l'axe Ox l'angle $(Ox, Ou) = \alpha$. Cette onde est polarisée, son champ électrique étant paralléle à Oz. Les origines du temps et de l'espace sont telles que les variations du champ électrique en O peuvent se traduire par la relation : $E_z = E_0 \cos\omega t$.

1. Ecrire les composantes du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ (on désigne par k son module) sur les axes Oxyz, puis celles du champ électrique $\overrightarrow{E}(M, t)$ au point M quelconque à l'instant E.
2. En déduire les composantes du champ magnétique de l'onde $\overrightarrow{B}(M, t)$ et préciser les propriétés remarquables des champs de cette onde. On appelle impédance caractéristique la qualité $Z_c = \mu_0 \frac{|\overrightarrow{E}|}{|\overrightarrow{B}|}$. Donner l'expression de Z_c en fonction des caractéristiques du vide, puis sa valeur numérique.
3. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique $\frac{dW}{d\tau}(M, t)$, puis sa valeur moyenne au cours du temps que l'on notera $< \frac{dW}{d\tau} >$.
4. Exprimer les composantes du vecteur de Poyting $\overrightarrow{R}(M, t)$ puis son module, et enfin la valeur moyenne de celui-ci au cours du temps que l'on notera $< |\overrightarrow{R}| >$. Quelle relation existe-t-il entre ces deux valeurs moyennes ? Interpréter physiquement ce résultat.
5. Application numérique : une o.p.u.s transporte une puissance de $0, 2W.m^{-1}$ évaluée à travers une surface normale à la surface de propagation. Quelle sont les valeurs de $< |\overrightarrow{R}| >$, $< |\frac{dW}{d\tau}| >$, E_0 et B_0 amplitude du champ magnétique .

⋆ **Exercice 6 :Structure d'une onde plan progressive**

L'espace est rapporté à un triédre trirectiligne direct Oxyz et on désigne par $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, et $\overrightarrow{z}$ les vecteurs unitaires des axes. On se place dans le vide en l'abscence de toute charge et de tout courant. On donne : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10.^{-3}MKSA$; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}MKSA$.

1. Ecrire les équations aux dérivées partielles auxquelles obiéssent les champ électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$.
2. On suppose que les champs de vecteurs cherchés ne dépendent que de la coordonnée z, c'est-à-dire que les dirivées partielles par rapport à x et y sont nulles - Hypothése d'ondes planes -
   (a) Ecrire l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit $\overrightarrow{E}$. Le solution de cette équation est la somme de deux termes ; montrer qu'ils correspondent à d eux ondes progressives se propagent en sens contraires. Calculer la vitesse de propagation de ces ondes.
   (b) On considére une de ces ondes progressives :
      i. montrer qu'elle est transversale.
      ii. montrer que $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont orthogonaux et que le triédre $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{c}$ est direct ($\overrightarrow{c}$,vecteur vitesse de l'onde).
   (c) On suppose qu'on impose à $\overrightarrow{E}$ de varier suivant le loi : $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{x}\cos[\frac{\omega}{c}(z - ct)]$. Montrer que $\overrightarrow{B}$ peut s'écrire : $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{y}\cos[\frac{\omega}{c}(z - ct)]$. Trover une relation entre ε_0, μ_0, E_0 et B_0.

(d) Application numérique : $\omega = 2\pi N$; $N = 10^{10} Hertz$; $E_0 = 10^2 V.m^{-1}$. Calculer B_0 et la longueur d'onde λ.

$\star$ **Exercice 7 : Propagation d'une onde dans un plasma en l'abscence d'un champ magnétique statique**

On considére, sous trés faible pression, un gaz ionisé, ou plasma, électroniquement neutre, contenant, par unité de volume, N ions positifs de charge +e (e > 0) et de masse M, et N électrons de charge -e et de masse m. Le nombre N étant petit, on pourra négliger les interactions électromagnétiques et mécaniques entre les particules, et considérer le gaz comme un milieu transparent, linéaire, homogéne, isotrope et non magnétique ; sa pérmittivité diélectrique et sa perméabilité magnétique sont celles du vide.

1. On crée, dans ce gaz en équilibre thermique , un champ électrique sinusöidale de pulsation ω : $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 e^{-i\omega t}$.
   (a) Ecrire les équations différentielles vérifiées par la vitesse $\overrightarrow{V}_i$ prise par l'ion, par la vitesse $\overrightarrow{V}_e$ prise par l'électron, sans l'action de ce champ.
   (b) En déduire $\overrightarrow{V}_i$ et $\overrightarrow{V}_e$ en fonction du champ électrique $\overrightarrow{E}$. On considérera la vitesse des particules comme négléGeable en l'abscence de champ.
   (c) Calculer la densité de courant $\overrightarrow{j}$ en fonction de $\overrightarrow{E}$ et en déduire que la loi d'Ohm s'applique sous réserve de prendre pour conductivité k du gaz une grandeur complexe dont on donnera l'expression.
   (d) En prenant M = 1868m, trouver une expression simplifiée de la conductivité. Cette nouvelle expression sera seule utilisée dans la suite du problème. Quelle remarque cette expression permet-elle de faire sur le rôle des ions dans la conductivité ?
2. Le champ électrique de la premiére question est celui d'une onde monochromatique plane de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$: $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \exp i(\overrightarrow{k}\overrightarrow{r} - \omega t)$.
   (a) Compte tenu des hypothéses initiales, quelle est l'équation de dispersion $k(\omega)$? tracer la courbe $k = k(\omega)$.
   (b) Montrer que pour les pulsations ω supérieures à une certaine pulsation ω_p que l'on calculera, il ya propagation sans atlénuation. Que se passe-t-il pour les autres valeurs de ω ?
   (c) Pour $\omega > \omega_p$, calculer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ de l'onde. Quelle la relation qui les lie ?