Électromagnétisme

T.D N°7 d'électromagnétisme

Réflexion et Transmission par un milieu conducteur

⋆ Exercice 1 :Onde électromagnétique le long d'un conducteur parfait :
Une onde progressive électromagnétique se propage parallèlement à un plan conducteur parfait. La surface plane du conducteur est le plan (xOy). Le métal est semi-infini, et occupe la zone(y<0). (Voir schéma).
Le champ électrique est de forme : $\overrightarrow{E} = f(y)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e}_z$.

1. Caractériser la forme générale acceptable du champ électromagnétique correspondant à des solutions de ce type.
2. Quelle sont les charges et courants portés par le conducteur parfait ?
3. Définir et calculer la vitesse de propagation de l'énergie.

⋆ Exercice 2 :Réflexion normale d'une onde plane sur un métal parfait
L'espace est rapporté au référentiel orthonormé direct Oxyz de base $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$. Le demi-espace x < 0 est vide et le demi-espace $x \geq 0$ est occupé par un conducteur métallique supposé parfait (conductivité γ quasi-infinie). La permittivité du vide est $\varepsilon_0 = (36\pi.10^9)^{-1}S.I.$ Une onde éledtromagnétique plane incidente $(\overrightarrow{E}_i, \overrightarrow{B}_i)$, sinusoïdale de pulsation ω, polarisée rectillignement prallélement à Oy, se propage vers le métal suivant la direction Ox : $E_1 = E_0.\cos(\omega t - kx).\overrightarrow{u}_y$.
Cette onde se réflichit normalement sur le conducteur métallique :

1. Exprimer le champ électrique total $\overrightarrow{E}(x,t)$ et le champ magnétique total $\overrightarrow{B}(x,t)$ à l'instant t en tout point M(x, y, z) du demi-espace vide. En déduire le rapport des modules des champs $\frac{E}{B}$ en fonction de c, k, x.
2. Déterminer le vecteur de Poyting $\overrightarrow{R}(x,t)$ de l'onde résultante et justifier sa dénomination d'onde stationnaire.
3. Déterminer le vecteur densité surfacique $\overrightarrow{J}_s$ de courant engendré par l'onde sur la surface du conducteur en contact avec le vide.
4. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique $< \overline{\omega} >$en tout point M, en fonction de ε_0 et E_0.
5. Calculer la pression électromagnétique moyenne $< p >$ exercée par l'onde sur la surface du conducteur. Comparer $< p >$ et $< \overline{\omega} >$.

⋆ Exercice 3 : Dipersion et vitesse de phase et de groupe. Propagation de l'énergie
Entre deux planteaux métalliques parfaits, occupant les plans y = 0 et y = a, se propage suivant l'axe Oz une onde électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ monochromatique, de pulsation ω, dont les composantes suivant les axes du référentiel Oxyz direct orthonormé de base $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ sont :

$$\overrightarrow{E} = \begin{cases} E_x = E_0\sin(\frac{\pi y}{a}).\sin(\omega t - kz) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{B} = \begin{cases} B_x \\ B_y = B_1\sin(\frac{\pi y}{a}).\sin(\omega t - kz) \\ B_z = B_2\cos(\frac{\pi y}{a}).\cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

1. Montrer que $B_x = 0$, puis calculer les constantes B_1 et B_2 en fonction de E_0.
2. (a) Etablir la relation de despersion $k(\omega)$ et calculer la fréquence de coupure f_c de l'onde enfonction de a et c (célérité de l'onde dans le vide).
   (b) Exprimer la vitesse de phase v_φ ainsi que le coefficient de dispersion $\delta = \frac{dk}{d\omega}$ du milieu vide intra-conducteur.
3. (a) Exprimer, en fonction de a, E_0, l,ω et μ_0 (perméabilité du vide), la puissance $< \mathcal{P} >$ moyenne qui traverse un plan de section z = Cte entre les plateaux de largeur l dans la direction Ox.
   (b) Exprimer l'énergie électromagnétique volumique u(x, y, z) entr les plateaux ; en déduire sa valeur moyenne $\overline{u}(z,t)$ sur la section droite d'abscisse z = Cte, puis sa valeur moyenne $< \overline{u} >$ dans le temps ; exprimer $< \overline{u} >$en fonction de E_0 et ε_0 (permittivité du vide).
   (c) En déduire la vitesse de propagation V de l'énergie électromagnétique dans ce guide, en fonction de c et v_φ ; comparer avec la vitesse de groupe v_g et conclure.
4. Exprimer la vitesse de groupe v_g d'une onde en fonction de v_φ (vitesse de phase), $\frac{dv_\varphi}{dk}$ et k(module du vecteur d'onde).

⋆ Exercice 4 :
Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ d'une onde plane, polarisée rectilignement, qui se propage suivant la direction Oz dans un bon conducteur d'épaisseur "infinie" de constantes ε_0 et $\mu_0$et conductibilité γ, est décrit par :

$$\overrightarrow{E} = E_0.e^{-\frac{z}{\delta}}e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})}\overrightarrow{u}_x \quad avec \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\gamma}}$$

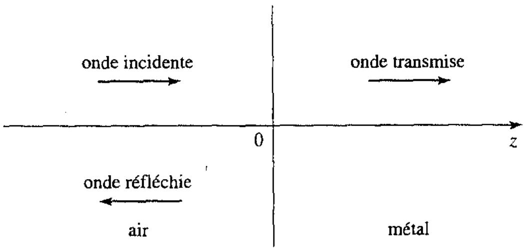
l'espace étant rapporté au référentiel Oxyz de base orthonormée $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$.on admettera que la densité de charge est nulle en tout point du conducteur.

1. vérifeir que le champ $\overrightarrow{E}$ obéit à l'équation d'Helmoltz, du type :
   $$\Delta\overrightarrow{E} - \overline{K}^2\overrightarrow{E} = 0$$
   Exprimer le module K et l'argument φ de la constante complexe d'Helmoltz $\overline{K}$
2. Exprimer le champ magnétique complexe $\overrightarrow{B}(z,t)$ dans le conducteur et vérifier qu'il sa tisfait à l'équation de Maxwell $div\overrightarrow{B} = 0$.
3. calculer, en fonction μ_0, ω et γ, le module Z et l'argument θ de l'impédance de complexe $\overline{Z} = \mu_0\frac{\overline{E}}{\overline{B}}$ liée aux champs complexes $\overline{E}$ et $\overline{B}$. Exprimer Z en fonction de $\overline{K}$ et δ.

4. (a) Exprimer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R}$ à l'instant t, au point de cote z du conducteur
   (b) Calculer la puissance moyenne cédée par l'onde par unité de surface du conducteur de cote z, en fonction de μ_0, ω E_0 et γ

⋆ Exercice 5 :Réflexion d'une onde hyperfréquence sur un conducteur

1. **Propagation métallique :** Une onde électromagnétique plane transverse monochromatique de pulsation ω, à polarisation rectiligne (le champ électrique est parallèle à (Ox)), se propage suivant (Oz), à l'intérieur d'un milieu métallique homogène et isotrope de permittivité et de perméabilité assimilables à celles du vide. La conductivité du métal en régime statique est notée γ_0. Pour les applications numériques, on prendra $\gamma_0 = 6.10^7 S.m^{-1}$, et Une fréquence f = 1 GHz pour l'onde hyperfréquence.
   (a) La conductivité du métal est assimilée à sa conductivité en régime statique, notée γ_0 Quelle justification voyez-vous à ce fait ?
   (b) Eécrire les équatiions de Maxwell simplifiées qui permettent de décrire la propagation de l'onde hyperfréquence dans le métal. En déduire l'équation de propagation de l'onde hyperftéquence dans le conducteur.
   (c) Définir et calculer l'épaisseur de peau δ caractérisant la pénétration de l'onde dans le conducteur. Préciser le déphasage entre le champ électrique et le champ magnétique de l'onde.
   (d) Définir et exprimer l'indice " équivalent" du milieu métallique dans le domaine de fréquences envisagé.
2. **Réflexion métallique :**



Le milieu conducteur précédent occupe le demi-espace z > 0 tandis que l'air (assimilé au vide) occupe le demi-espace z < 0. Une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω se propage dans la direction de l'axe (Oz) dans l'air. Le champ électrique de cette onde s'écrit : $\underline{\overrightarrow{E_1}} = \underline{\overrightarrow{E_{01}}} e^{j(\omega t - kz)}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.
À l'interface air-conducteur, elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise dont les champs électriques s'écrivent respectivement : $\underline{\overrightarrow{E'_1}} = \underline{\overrightarrow{E'_{01}}} e^{j(\omega t - k'z)}$ et $\underline{\overrightarrow{E_2}} = \underline{\overrightarrow{E_{02}}} e^{j(\omega t - k''z)}$
   (a) Quels sont les nombres d'onde k' et k" ?
   (b) Quels sont les champs magnétiques $\underline{\overrightarrow{B_1}}$, $\underline{\overrightarrow{B'_1}}$ et $\underline{\overrightarrow{B_2}}$ des trois ondes considérées ?
   (c) QueUes sont les conditions imposées aux composantes tangentielles de $\underline{\overrightarrow{E}}$ et $\underline{\overrightarrow{B}}$ sur le plan z = 0 ? En déduire les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et transmission $\underline{\tau}$ en amplitude (du champ électriqne), en fonction de $\underline{\overrightarrow{E_{01}}}$, δ et ω.
3. **Aspect énergétique :**
   (a) Calculer les moyennes temporelles des vecteurs de Poynting des trois ondes.
   (b) Déterminer le coefficient de réflexion en puissance R cn fonction de δ et ω
   (c) Vérifier qu'il y a bien conservation de l'énergie (c'est-à-dire que la puissance de l'onde incidente est bien égale à la somme de celles de l'onde réfléchie et de l'onde transmise en z= 0).
   (d) Calculer la puissance moyenne réelle $< \mathcal{P}_J >$ dissipée par effet Joule dans un cylindre de section S, entre les abscises z = 0 el $z = \infty$. Comparer cette puissance au flux moyen du vecteur de Poynting de l'onde transmise à travers la surfaec S en z = O
4. **Pression de radiation :**
   (a) Justifier que sur le milieu conducteur s'exerce une force volumique moyenne :
   $$< \overrightarrow{f}_v >= \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\gamma_0 \underline{\overrightarrow{E}} \wedge \underline{\overrightarrow{B}}^*)$$
   L'exprimer en fonction de z, δ et de la densité volumique moyenne d'énergie de l'onde incidente, notée $< e_i >$.
   (b) En déduire que s'exerce sur le métal une force pressante dans la direction de l'onde incidente et définir une pression moyenne < P > appelée pression de radiation. Exprimer < P > en fonction de $< e_i >$ et des constantes caractéristiques de problème, puis simplifie cette expression compte tenu des ordres de grandeur.
5. **Limite du conducteur parfait :**
   (a) Commenter, compte tenu des ordres de grandeurs envisagés, les valeurs de $(k\delta)$, r, R et T.
   (b) Le conducteur est "parfait" si l'épaisseur de peau est nulle : "$\delta = 0$". Commenter.
   (c) Quelles sont les valeurs des champs électrique et magnétique de l'onde transmise dans le cas réel ($\delta > 0$) et dans le cas idéal ($\delta = 0$) ?
   (d) Quelle est l'expression du vecteur densité de courant au sein du métal ? Commenter son comportement à la limite δ tend vers 0. Indiquer la valeur du courant surfacique permetant de modéliser ce cas limite.
   (e) Quelle est la condition limite, précédemment utilisée, qui n'est plus applicable dans le cas du conducteur parfait ? Proposer une reprise rapide des calculs des ondes et coefficients associés dans le cas où on se place d'emblée à la limite $\delta = 0$.

⋆ Exercice 6 :Traversée de l'interface atmosphère -ionosphère

1. **Propagation ionosphèrique :**
L'ionosphère est une couche atmosphérique située à très haute altitude (au-delà de 60 km), que l'on assimilera à un gaz ionisé (plasma) globalement électriquement neutre, constitué de N électrons libres de masse m et de charge (- e) et de N ions positifs de masse M et de

charge (+ e) par unité de volume. Ce gaz est un milieu raréfié de permittivités diélectrique et magnétique égales à celles du vide, contenant des particules chargées dont les interactions sont négligées.
Données ;
$e = 1,6.10^{-19}C$; $m = 0,91.10^{-30}kg$; $M = 1,67.10^{-27}kg$; $N = 6.10^{11}electrons.m^{-3}$; Une onde éleetromagnétique plane, monochromatique, de pulsation ω se propage dans ce milieu dans la direction (Oz). Le champ électrique de cette onde s'écrit : $\overrightarrow{\underline{E_2}} = \underline{E}_{02}e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}_2 z)}\overrightarrow{e}_x$, ou $\overrightarrow{k}_2 = k_2\overrightarrow{e}_z$ désigne le vecteur d'onde.

(a) Étudier les mouvements des électrons et des ions induits par l'onde électromagnétique. On notera $\overrightarrow{v}_e$ et $\overrightarrow{v}_i$ les vecteurs vitesses complexes correspondants. Montrer que la conductivité du milieu peut être assimllée à $\gamma = -\frac{jNe^2}{m\omega}$.

(b) Montrer que la relation de dispersion peut se mettre sous la forme $k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})$ et déterminer fréquence de plasma $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ en fonction de N, e, m et ε_0. Calculer la valeur numérique de f_p.

(c) Montrer que l'on peut étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans l'ionosphère comme si celle-ci était un milieu diélectrique l.h.i.dont on exprimera le carré de l'indice complexe $\underline{n}$ en fonction de ω et de ω_p.

2. **Reflexion et rréfraction ionosphérique :**
L'atmosphère (dont les propriétés seront supposées être celles du vide) est dans la région z < 0, et l'ionosphère dans la région z > 0, Une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement se propage de la Terre vers l'ionosphère. Son champ électrique $\overrightarrow{\underline{E_1}}$ s'écrit $\overrightarrow{\underline{E_1}} = \underline{E}_0.e^{j(\omega t - kt)}\overrightarrow{e}_x$.
À l'interface, cette onde donne naissance à une onde transmise et à une onde réfléchie dont les champs électriques respectifs sont notéset $\overrightarrow{E}_2$ et $\overrightarrow{E'}_i$.

(a) Écrire les conditions aux limites (en z = 0) que doivent vérifier les champs électriques et magnétiques de ces trois ondes. En déduire deux relations qui lient les amplitudes $\underline{E}_{01}$, $\underline{E'}_{01}$, $\underline{E}_{02}$ et le seul paramètre $\underline{n}$.

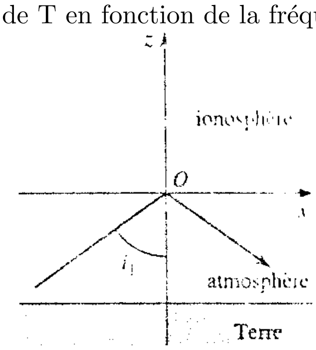
(b) Déterminer l'expression du coefficient de réflexion en amplitude défini par $\underline{r} = \frac{\underline{E'}_{01}}{\underline{E}_{01}}$ en fonction de $\underline{n}$. En déduire le fateur de réflexion en puissance R, en fonction de ω et de ω_p.

i. Pour $\omega < \omega_p$ comment peut on qualifier l'interfaee atmosphère-ionosphère ?

ii. $\omega > \omega_p$ calculer les valeurs numériques de R pour les fréquences f = 7 MHz et f = 8 MHz.

iii. Tracer L'allure du graphe de R en fonction de la fréquence f.

(c) Quelle est la relation entre le facteur de réflexion en puissance R et le facteur dc transmission en puissance T ? Sur un même schéma, donner l'allure du graphe de T en fonction de la fréquence f.



(d) Un poste émetteur, situé au niveau de la mer, émet une onde assimilée à une onde plane monocromatique de fréquence $f > f_p$, qui arrive sous incidence obilique (angle i_1) sur l'interface atmnsphère ionosphère. Calculcr le cosinus de l'angle limite i_{1L} à partir duquel l'onde incidente est totalememt réfilichie vers le sol en fonction de la fréquence f de l'émetteur et de la fréquence de coupure f_p. Faire l'application numérique pour une fréquence f = 12 MHz.