

Électromagnétisme

T.D N°8 d'électromagnétisme

Guide des ondes EM

★ Exercice 1 : Propagation de modes TM entre deux plans conducteurs :

On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques entre deux plans conducteurs parfaits parallèles d'équations $x = \pm d/2$. On cherche une solution des équations de propagation dont le champ magnétique est la forme : $\vec{B} = f(x) \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_y$.

1. Montrer que la comptabilité de cette solution et du champ électrique associé avec les équations de MAXWELL et les conditions aux limites imposent une quantification et une relation de dispersion à déterminer.
2. Tracer les graphes donnant k , la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la pulsation ω de l'onde guidée.
3. En considérant le flux moyen d'énergie transporté par l'onde dans sa direction de propagation, définir et calculer la vitesse d'énergie associé. A quelle vitesse s'identifie-t-elle ?
4. Les modes étudiés ici sont traverses magnétiques (modes TM) : le champ magnétique est perpendiculaire à la direction de propagation. Parmi ceux-ci, est-il possible de trouver une solution correspondant à un mode transverse électrique et magnétique (modes TEM) ? Caractériser la propagation d'une telle onde dans le guide constitué par les deux plans conducteurs.

★ Exercice 2 : Atténuation d'une onde dans un guide métallique :

On s'intéresse à la propagation d'une onde progressive monochromatique dans un guide métallique d'axe (Ox), à section carrée de côté a (parois d'équations $y=0, y=a, z=0, z=a$), dans le mode TE_{10} . Le champ électrique est polarisé dans la direction de $\vec{e}_y$.

1. Le métal est supposé parfait. Rappeler brièvement les caractéristiques des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Déterminer, en particulier :
 - La valeur moyenne (temporelle et spatiale) du vecteur de POYTING ;
 - La valeur moyenne (temporelle et spatiale) du carré du courant surfacique j_s sur les parois du guide ;
2. Le métal est de conductivité γ grande, mais finie, et nous admettons que les grandeurs calculées précédemment sont presque exactes. Pour simplifier, nous considérons que le courant volumique est uniformément distribué sur une épaisseur égale à l'épaisseur de peau ? Calculer, avec ces hypothèses :

- (a) La puissance dissipée sur une longueur l ;
- (b) L'atténuation de l'onde, exprimée en décibel par mètre si $\lambda = 3\text{cm}$; $a = 2\text{cm}$ et $\gamma = 5.10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

Données : L'épaisseur de peau est :

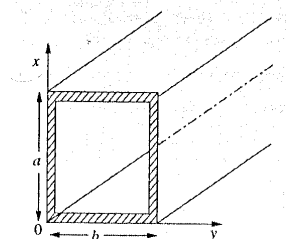
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \gamma}}$$

Gain de puissance :

$$G_{dB} = 10 \log(P_{\text{sortie}}/P_{\text{entre}})$$

★ Exercice 3 : Mode TE_{mn} de propagation dans un guide d'onde rectangulaire :

un guide d'onde, d'axe parallèle à Oz, de section droite rectangulaire de dimension a (suivant Ox) et b (suivant Oy), à parois métallique supposées parfaites.



on désire étudier la propagation suivant Oz, dans la cavité vide, d'une onde électromagnétique TE de haute fréquence dont le champ électrique (transversal) en $M(x,y,z)$ est donné par ses composantes :

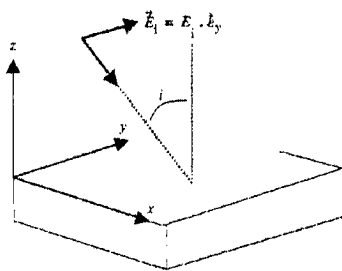
$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \cdot e^{i(\omega t - k_x z)} \\ E_y = -E_0 \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta y) \cdot e^{i(\omega t - k_x z)} \\ E_z = 0 \end{cases}$$

avec $\alpha = m \frac{\pi}{a}$ et $\beta = n \frac{\pi}{b}$ (m et n sont deux entiers)

1. déterminer les composantes B_x, B_y et B_z du champ $\vec{B}$ en $M(x,y,z)$ à l'instant t , dans ce guide d'onde rectangulaire.
2. établir l'équation de dispersion $k_g(\omega)$ de ce guide d'onde.
3. exprimer, pour un mode de propagation TE caractérisé par les entiers m et n , l'impédance d'onde $Z(\omega)$ définie par $Z = \mu_0 \frac{E_{\perp}}{B_{\perp}}$, où $E_{\perp}$ et $B_{\perp}$ sont les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ perpendiculaire à la direction Oz de propagation.
4. pour chacun des modes TE_{mn} il existe une fréquence de coupure f_{cmn} au dessous de laquelle l'onde ne peut plus se propager. exprimer f_{cmn} en fonction de a, b, m, n et c .
5. exprimer la vitesse de phase v_{ϕ} et la vitesse de groupe v_g des modes TE_{mn} , vérifier que $v_{\phi} \cdot v_g = c^2$
6. exprimer la longueur d'onde apparente λ_g de propagation dans le guide en fonction de a, b, m, n et la longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ dans le vide infini.

★ Exercice 4 : Guidage d'une onde entre deux plans conducteurs parfaits

1. Réflexion oblique sur un miroir :

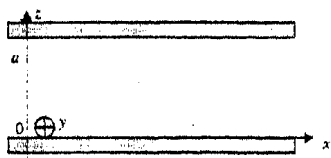


- Le plan d'incidence est parallèle à (xOz).
- L'onde incidente est polarisée rectilignement, perpendiculairement au plan d'incidence.

Une O.P.P.M. électromagnétique de pulsation ω arrive sous l'incidence i sur un métal, assimilé à un conducteur parfait, dont la surface est le plan $z = 0$. Le plan d'incidence est parallèle à (xOz), et l'onde incidente est polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence.

- Indiquer les expressions des champs électromagnétiques de l'onde incidente (on note E_0 l'amplitude de son champ électrique), puis de l'onde réfléchie.
- Caractériser l'onde résultant de la superposition de = deux ondes.

2. Guidage :



un second plan conducteur limite le domaine de propagation des ondes à la zone $0 < z < a$. On alimente ce guide d'onde, de largeur $a = 3 \text{ cm}$, par une antenne rayonnante qui émet un signal de fréquence $\nu = 8 \text{ GHz}$.

- Montrer que les conditions aux limites imposées par ce deuxième plan imposées une condition de quantification à l'onde globale.
- En notant n l'entier intervenant dans cette condition de quantification, exprimer le nombre d'onde k du mode " n ", puis la relation de dispersion de l'onde globale guidée entre les deux plans conducteurs parfaits. Quelle est la pulsation de coupure du mode " n " guidé? Tracer le graphe $k = f(\omega)$.
- Quelles sont les vitesses de phase et de groupe liées à ce mode " n " de propagation dans le guide métallique?
- Quelle longueur d'onde λ_g (longueur d'onde du mode guidé) peut-on associer au nombre d'onde k ? Quels sont les modes susceptibles d'être excités par l'antenne émettrice?

3. Propagation d'énergie :

- Quelle est la puissance moyenne véhiculée par l'onde électromagnétique guidée à travers une section d'abscisse x donnée, entre les deux plans conducteurs, pour une longueur Δy unité?
- Quelle est la valeur moyenne de l'énergie associée à l'onde, contenue dans un volume $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ de dimensions Δ_x et Δ_y unités et $\Delta_x = a$?

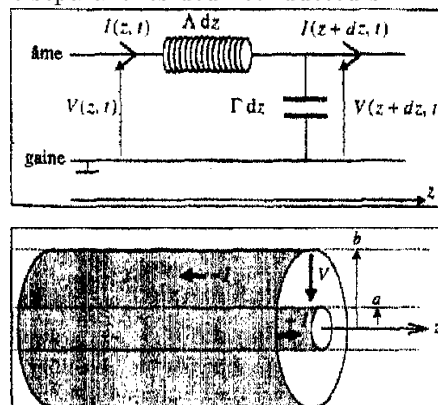
- Quelle vitesse de propagation de l'énergie ces deux grandeurs permettent-elles de définir? Quelle vitesse caractéristique du mode " n " retrouve-t-on?

★ **Exercice 5 :** Propagation d'une onde électromagnétique transverse dans un câble coaxial

Les capacité Γ inductance L linéiques d'un câble coaxial dont l'âme et la gaine ont pour rayons respectifs a et b sont :

$$\Gamma = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \text{ et } \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

où ϵ est la permittivité diélectrique du manchon isolant en polyéthylène séparant les deux conducteurs.



1. Étude électrique :

- Rappeler les équations de couplage et de propagation vérifiées par le courant $I(z,t)$ et la tension $V(z,t)$. Quelle est la célérité des ondes se propageant dans la ligne électrique?
- Quelle est, en notation complexe, la forme générale des solutions oscillantes (de pulsation ω) de ces équations, notées $I(z,t)$ et $V(z,t)$?

2. Description électromagnétique : On se propose de retrouver ces résultats, par une approche électromagnétique, en admettant le caractère transverse des ondes étudiées; les champs électrique et magnétique, se propageant dans la direction de l'axe (Oz), ont perpendiculaires à celui-ci. Le champ électrique de l'onde sera désigné pour $a < r < b$, par la notation complexe : $\vec{E}(r, \theta, z, t) = \underline{\mathcal{E}}(r, z) \vec{e}_r e^{j\omega t}$

- Commenter ce choix.
- Montrer que le champ magnétique associé à l'onde est, dans l'espace inter-armatures du câble, de la forme : $\vec{B}(r, \theta, z, t) = \underline{\mathcal{B}}(r, z) \vec{e}_\theta e^{j\omega t}$ en précisant la valeur de $\underline{\mathcal{B}}(r, z)$ en fonction de $\underline{\mathcal{E}}(r, z)$.
- Relier ce champ au courant $\underline{I}(z,t)$ circulant dans l'âme du câble.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\underline{\mathcal{E}}(r, z)$, ainsi que la forme générale de ses solutions.
- Ces relations permettent-elles de retrouver la description de la propagation à l'aide des fonctions $\underline{I}(z,t)$ et $\underline{V}(z,t)$?
- Calculer la puissance instantanée transportée par l'onde électromagnétique à travers une section d'abscisse z du manchon diélectrique. Interpréter le résultat obtenu.