CPGE- Mention MP
mécanique de solides
D.L N°1 de la mécanique de solides

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre. Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. La barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

1^{me} *Partie* *QUELQUES OSCILLATIONS*

Dans tout ce problème, les vecteurs sont surmontés d'un chapeau $\widehat{a}$ s'ils sont unitaires, d'une flèche .$\overrightarrow{a}$ dans le cas contraire. Les nombres complexes sont soulignées : $z\epsilon\mathcal{C}$.
Lorsqu'une bille sphérique roule sur une piste de forme circulaire suspendue en un point, le couplage entre la bille et la piste engendre un mouvement spectaculaire, objet de ce problème. Une sphère homogène, de centre C, de rayon r et de masse m, est mobile dans un plan vertical en restant en contact avec un rail PP', de masse M, que l'on modélise par une portion de cercle de centre O et de rayon R, dont l'axe de symétrie est vertical.

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à un axe passant par C est $J = \frac{2mr^2}{5}$. Le référentiel fixe orthonormé direct $R_g = (O, \widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k})$ où $\widehat{i}$ est vertical dirigé vers le bas est supposé galiléen (voir Figure 1). On pourra également utiliser les vecteurs mobiles polaires unitaires $\widehat{r}$ et $\widehat{\alpha}$ représentés sur la Figure 1. Le mouvement de la sphère est repéré par deux paramètres : l'angle α que fait $\overrightarrow{OC}$ avec $\widehat{i}$ et l'angle de rotation θ autour de l'axe horizontal qui porte bk. à chaque instant t, on appelle I le point de contact de la sphère avec le rail. On note A le point du rail situé sur son axe de symétrie. L'accélération de la pesanteur est $\overrightarrow{g} = g\widehat{i}$.

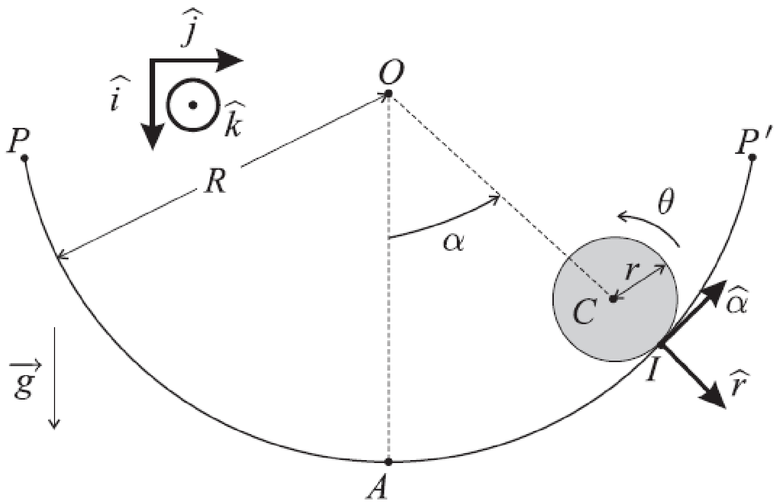

Figure 1 : Sphère mobile sur un rail fixe

1 Rail fixe

La sphère roule sans glisser sur le rail fixe. Initialement, elle est au repos et $\overrightarrow{OC}$ fait un angle α_0 avec $\widehat{i}$. Le système comprend deux degrés de liberté cinématiques, α et θ .

1. *Ecrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le rail sous la forme d'une relation linéaire liant r, R, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ et $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$. Contrôler la pertinence de la relation obtenue, d'une part en comparant les signes respectifs de $\dot{\theta}$ et de $\dot{\alpha}$, et d'autre part en analysant la situation lorsque r = R.*
2. *Déterminer l'expression de l'énergie mécanique totale Et du système. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\alpha(t)$.*
3. *Déterminer la période T_{po} des petites oscillations. On considère deux rails circulaires de même rayon R. Sur chaque rail, on place à l'instant initial une sphère de rayon r, de masse m en des points repérés par le même angle α_o (situation déjà représentée sur la Figure 1). Les sphères sont lâchées au même instant, avec une vitesse initiale nulle. Les deux rails sont de nature différente, de sorte que la première sphère roule sans glisser et que la seconde glisse sans rouler.*

4. *En utilisant des arguments énergétiques qualitatifs, déterminer quelle est la sphère qui arrive la premi'ere au point le plus bas A. Le résultat est-il modifié si les masses des sphères sont différentes ?*
5. *Etablir une expression intégrale du temps τ mis par la sphère la plus rapide pour atteindre le point A. Comment peut-on, sans calcul supplémentaire, obtenir le temps τ' mis par la sphère la plus lente pour atteindre ce point ? Déterminer le rapport $\frac{\tau'}{\tau}$.*

2 Rail suspendu

Les points P et P' sont attachés en O par des fils inextensibles de masse négligeable, ce qui permet au rail d'osciller autour de l'axe horizontal passant par O. La position du milieu A du rail est repérée par l'angle β représenté sur la Figure 2. Le centre de masse G du rail se trouve à chaque instant sur la droite OA à une distance l de O. On note $J' = MR^2$ le moment d'inertie du rail par rapport à son axe de rotation. On appelle respectivement N et T les composantes de la force de réaction du rail sur la sphère au point I selon $\widehat{r}$ et α. La sphère roule sans glisser sur le rail, qui est maintenant en forme de quart de cercle, les grandeurs α et θ sont les m.emes que celles utilisées dans la partie I.

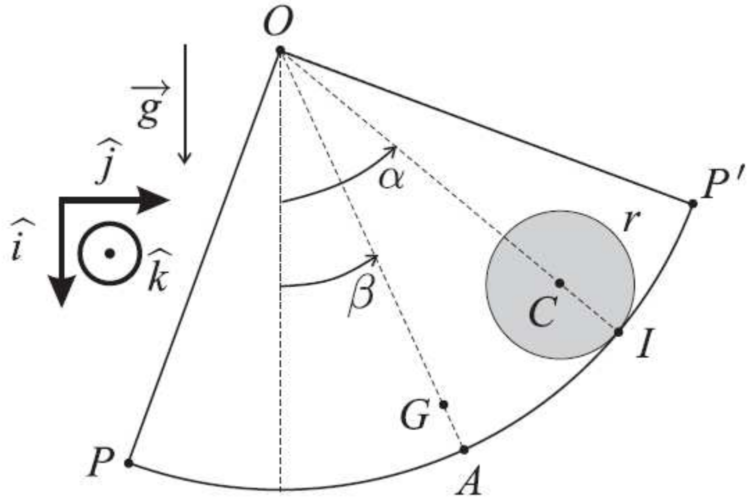

Figure 2 : Sphère mobile sur un rail suspendu
Les angles α et β sont mesurés par rapport à la verticale et l'on note $\left|\overrightarrow{OG}\right| = \ell$

1. *Ecrire la condition de roulement sans glissement reliant $\dot{\theta}$, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$.*
2. *Exprimer dans R_g le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{1C}}$ de la sphe're en C et en déduire l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{1O}}$ de la sphère en O.*
3. *Exprimer dans Rg le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{2O}}$ du rail en O.*
4. *Exprimer dans R_g, l'énergie cinétique E_{CS} de la sph'ere, l'énergie cinétique E_{CR} du rail et enfin l'énergie cinétique E_{CT} de l'ensemble rail-sphère.*
5. *Appliquer le théorème du moment cinétique en O à l'ensemble rail-sphère et en déduire une équation différentielle liant les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.*
6. *Appliquer le théorème du moment cinétique en C à la sphère seule et en déduire l'expression de T en fonction de $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, puis, en utilisant le résultat de la question 6, en fonction de $\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ et $\ddot{\beta} = \frac{d^2\beta}{dt^2}$.*
7. *Appliquer le théorème du moment cinétique en O au rail seul et en déduire la relation différentielle*

$$A\frac{d^2\beta}{dt^2} - B\frac{d^2\alpha}{dt^2} = Mglsin\beta \tag{1}$$

   On exprimera la constante A en fonction de M, m et R et la constante B en fonction de m, r et R

8. *Déduire des résultats précédents la relation*

$$A'\frac{d^2\alpha}{dt^2} - B\frac{d^2\beta}{dt^2} = -Mg(R-r)sin\alpha \tag{2}$$

   On exprimera la constante A' en fonction de m, r et R. Vérifier que l'équation (2) est en accord avec le résultat de la question 2.

9. *Retrouvez les équations (1) et (2) à partir de considérations énergétiques. Démontrer que $AA' > B^2$.*
10. *Que traduit l'absence de termes en $\dot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$ dans les équations (1) et (2) ?*

2^{me} ***Partie***
Accélération et freinage d' une automobile

Ce problème étudie les performances en accélération et freinage d'une automobile se deplacant en ligne droite. On considère le referentiel terrestre R associe au repere (Oxyz) comme étant galileen. On note $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ *le triedre associé. On considère que la voiture (figure 1) est composée de 3 systemes notes* (S_1),(S_2),(S).
On appelle R^* *le referentiel du centre de masse de la voiture.*
Le systeme (S_1) *, de masse* m_1 *est constitue par l'essieu de longueur L et les deux roues avant de la voiture. On note* J_1 *, son moment d'inertie par rapport a l'axe* G_1y*, ou* G_1 *est le centre d'inertie de* (S_1) *. Les roues avant, assimilees à deux disques de rayon a de centre* O_1 *et* O_1' *, sont motrices et donc soumises pendant la phase d'accélération à un couple de forces dont le moment résultant en* G_1 *est assimilable à* $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma\overrightarrow{e_y}$ *avec* $\Gamma > 0$ *.*
On considère que la résultante des actions de contact du sol sur (S_1) *est représentée par :* $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{T_1}.\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{e_z}$ *s'exercant sur chaque roue en* I_1 *et* I_1' *.*
On appelle R_1^* *le referentiel du centre de masse de* (S_1) *.*
(S_1) *est anime dans* R_1^**, d'un mouvement de rotation autour de* G_1y *à la vitesse angulaire* ω*.*
Le systeme (S_2) *, de masse* m_2 *est constitue par l'essieu et les deux roues arrières de la voiture. On note* J_2 *, son moment d'inertie par rapport a l'axe* G_2y*, ou* G_2 *est le centre d'inertie de* (S_2) *.*
Les roues arrières sont également assimilées à deux disques de rayon a de centre O_2 *et* O_2' *.*
On considère que la résultante des actions de contact du sol sur (S_2) *est représentée par :* $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{T_2}\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{N_2}\overrightarrow{e_z}$ *s'exercant sur les deux roues en* I_2 *et* I_2' *.*
On appelle R_2^* *, le referentiel du centre de masse de* S_2*.*
(S_2) *est anime dans* R_2^* *, d'un mouvement de rotation autour de* G_2y *à la vitesse angulaire* ω*.*
Le systeme (S), de masse M, est constitue du reste de la voiture. On neglige les mouvements de (S) par rapport a (S_1) *et* (S_2) *considères comme faibles et on ne prend pas en compte les déformations de la suspension. Le centre d'inertie G de l' ensemble du vehicule se trouve a une hauteur h du sol, une distance* l_1 *de* G_1 *et une distance* l_2 *de* G_2 *suivant l'axe Ox .*
Le coefficient de frottement de glissement, note f_0 *, entre une roue et le sol est identique pour les quatre roues. On considère que les forces de frottement de l'air sur le véhicule sont équivalentes à une force unique* $\overrightarrow{F_{air}}$ *appliquée en G avec :* $\overrightarrow{F_{air}} = -\frac{\rho c_x v^2 S}{2}\overrightarrow{e_x}$ *lorsque la voiture se déplace d'un mouvement de translation rectiligne suivant l'axe Ox.*
où :
- ρ *est la masse volumique de l'air avec* $\rho = 1,23kg.m^{-3}$ *,*
- c_x *est le coefficient de trainée qui dépend du profil de la voiture avec* $c_x = 0,3$ *,*
- *v est la vitesse de la voiture,*
- *S est la valeur du maitre couple, c'est-a-dire l'aire de la plus grande section transversale de la voiture avec* $S = 1,93m^2$ *.*

On note$\overrightarrow{OG}(t) = xt\overrightarrow{e_x}$ *.*
Données numériques :
On donne : $l_1 = 1,3m$ *;* $l_2 = 1,7m$ *; h = 0,8m ; a = 0,3m ; M = 1370 kg et* $g = 9,81ms^{-2}$

3 Etude de la phase d'accélération

1. *Ecrire le théorème du centre d'inertie dans R pour la voiture. En deduire deux relations notées 1 et 2.*
2. *Ecrire le théorème du moment cinétique en G pour la voiture dans* R^* *; la relation obtenue est notée 3.*
3. *Ecrire le théorème du moment cinétique respectivement en* G_1 *et* G_2 *pour le systeme (S1) dans* R_1^* *et* (S_2) *, dans* R_2^* *. En déduire deux relations notées 4 et 5.*
4. (a) *Ecrire la relation de non glissement des roues liant la vitesse lineaire* $v(t) = \dot{x}(t)$ *de la voiture et la vitesse angulaire* ω *des roues.*
   (b) *Donner alors l'équation différentielle du mouvement relative a x(t) .*

   On ne fait aucune supposition sur la nature du mouvement des roues dans les questions suivantes et on considère pour la suite du probleme (y compris la partie II) que la masse de

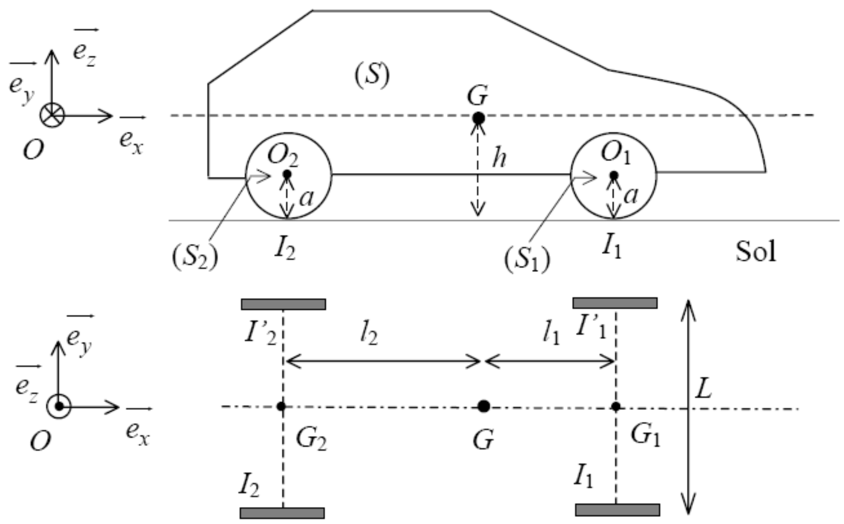

FIG. 1 –

(S_1) ***et celle de*** (S_2) ***sont tres petites devant celle de (S), ce qui revient a poser*** $m_1 = m_2 = 0$ ***et*** $J_1 = J_2 = 0$ ***dans les relations des questions I. 1, 2 et 3.***

5. (a) *Que deviennent les relations 1, 2 et 3 ? Donner alors l'expression de* T_1, T_2 , N_1 *et* N_2 *en fonction de* l_1 , l_2, *h, a, M, g et* Γ . *Comparer* N_1 *et* N_2 . *Quel est le sens de* $\overrightarrow{T_1}$ *et* $\overrightarrow{T_2}$ *?*

   (b) *Detérminer la valeur maximale de* Γ , *notee* Γ_{max} *qui assure un roulement sans glissement des roues de la voiture. Comment varie* Γ_{max} *en fonction de* l_2 , *de h et de* f_0 *? Quel est le sens physique de ces dépendances ?*
   Application numerique : *calculer les valeurs de* Γ_{max} *pour* $f_0 = 0,7$ *(pneus en bon état et route sèche), pour* $f_0 = 0,4$ *(route mouillee) et pour* $f_0 = 0,1$ *(route verglacée).*

   (c) *Pour* $\Gamma < \Gamma_{max}$, *la roue avant peut-elle décoller ? La roue arrière peut-elle décoller ?*

6. *Le fonctionnement à la limite du roulement sans glissement n'étant jamais atteint en raison d'une puissance moteur insuffisante, on considère une valeur de* Γ_{max} *inférieure à* Γ_{max} .

   (a) *Donner l'expression de la vitesse limite, notée* v_{lim} , *atteinte par la voiture ainsi que sa valeur numerique en* $km.h^{-1}$. *Application numerique :* $\Gamma = 300Nm$

   (b) *Intégrer alors l'équation du mouvement afin de donner la vitesse instantanée v(t) en fonction de* v_{lim} , *en considerant v(0) =0. On posera* $\alpha = \frac{\Gamma}{a.M.v_{lim}}$

   (c) *Estimer et calculer le temps* τ *tel que pour* $t << \tau$ *la resistance de l'air peut être negligée. Déterminer l'expression asymptotique de v(t) lorsque* $t << \tau$. *Calculer le temps* t_1 *(en tenant compte de la résistance de l'air) pour lequel* $v_1 = \frac{v_{lim}}{2}$.

7. *Donner l'expression de l'abscisse de la voiture x(t) sachant que x(0) =0.*

4 Etude de la phase de freinage

Pendant la phase de freinage, les roues avant sont soumises a un couple de forces dont le moment résultant en G_1 *est assimilable a* $\overrightarrow{\Gamma_1} = \Gamma 1\overrightarrow{e_y}$ *avec* $\Gamma_1 < 0$. *De même, les roues arrières sont soumises a un couple de forces dont le moment resultant en* G_2 *est assimilable a* $\overrightarrow{\Gamma_2} = \Gamma_2\overrightarrow{e_y}$ *avec* $\Gamma_2 < 0$. *On considère toujours que* $m_1 = m_2 = 0$ *et* $J_1 = J_2 = 0$.

1. *Quelle est la modification à apporter aux équations 1, 2, 3, 4, 5 des questions 1, 2, 3 de la partie 3 ? Ecrire ces équations.*
2. *En deduire l'expression et le sens de* T_1, T_2, N_1, N_2 . *Quelle doit etre la condition pour que* $N_2 > 0$ *?*

3. (a) *Donner l'expression des valeurs maximales des valeurs absolues de* Γ_1 *et* Γ_2 *, notees* Γ_{1M} *et* Γ_{2M} *, pour que le freinage s'effectue sans glissement.*
   (b) *Exprimer le rapport* $\frac{\Gamma_{1M}}{\Gamma_{2M}}$ *en fonction de* l_1*,*l_2*,* f_0 *et h. Quelles sont les roues qui se bloquent en premier ?*
   (c) *Application numérique :* calculer Γ_{1M} *et* Γ_{2M} *pour* $f_0 = 0,7$*,* $f_0 = 0,4$ *et* $f_0 = 0,1$.
4. *On se place a la limite du roulement sans glissement.*
   (a) *Donner la valeur numérique du module de la résistance de l'air Fair pour* $v = 130km.h^{-1}$ *,* $v = 50km.h^{-1}$ *et* $v = 10km.h^{-1}$
   (b) *En négligeant la résistance de l'air, quelle est la decélération maximale de l'automobile ? Donner la valeur numérique de la force de freinage* F_F *due aux frottements s'exercant sur la voiture pour* $f_0 = 0,7$*,* $f_0 = 0,4$ *et* $f_0 = 0,1$.
   (c) *Montrer alors que la resistance de l'air peut être négligée et exprimer alors la distance parcourue* d_ar *depuis l'instant où la voiture roule a une vitesse* v_0 *jusqu'à l'arrêt.*
   Application numérique : calculer dar avec $f_0 = 0,7$ *pour* $v_0 = 130km.h^{-1}$*,* $v = 90km.h^{-1}$ *et* $v = 50km.h^{-1}$*. Que deviennent ces résultats si* $f_0 = 0,4$ *puis* $f_0 = 0,1$ *?*
5. *Retrouver l'expression de* d_ar *en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la voiture.*