CPGE- Mention MP
CNC 1999
QUELQUES ASPECTS DE LA DYNAMIQUE TERRESTRE

Le problème propose l'étude de quelques propriétés des champs de gravitation et de pesanteur. Les différentes parties du problème sont largement indépendantes entre elles et comportent chacune plusieurs questions indépendantes. Les différentes parties peuvent être traitées dans un ordre quelconque, toutefois avant d'aborder l'une des parties du problème il est conseillé de lire celles qui la précédent. Lors des calculs numériques, dont l'importance ne doit pas être négligée, seuls des ordres de grandeur seront demandés. De ce fait, si X est la valeur numérique " exacte " d'une grandeur donnée alors toutes les valeurs comprises entre X/10 et 10 X seront acceptées. Seule la question 3.5.6. exigera un calcul d'ordre de grandeur un peu plus précis. On veillera à une présentation claire et soignée des copies ; il convient en particulier de rappeler avec précision les références exactes des questions abordées.

Données utiles

- Célérité de la lumière dans le vide $c_0 = 3 \times 10^8 m \cdot s^{-2}$.
- Constante de gravitation $G = 6,7 \times 10^{-11} S.I.$
- Permittivité électrique du vide $\varepsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} S.I.$
- Masse de la Terre $m_T = 6 \times 10^{24} Kg$.
- Rayon moyen de la Terre $R_T = 6,4 \times 10^6 m$.
- Masse de la lune $m_L = 7,3 \times 10^{22} kg$.
- Distance moyenne Terre-Lune $d_L = 3,8 \times 10^8 m$.
- Masse du Soleil $m_S = 2 \times 10^{30} kg$.
- Distance moyenne Terre-Soleil $d_S = 1,5 \times 10^{11} m$.

1^{me} *Partie*
Analogie électromécanique

On considère deux masses m_1 et m_2 ponctuelles situées respectivement aux points M_1et M_2 et de l'espace
1.1.1 Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F}_{g1\to 2}$exercé par $m_1$sur m_2 en fonction de m_1,m_2,G et$r_{12} = (M_1M_2)$? Cette force est-elle attractive ou répulsive ?
1.1.2. Quelle est la dimension de la constante de gravitation universelle G ? Avec quelle unité s'exprime-t-elle dans le système international des unités (S.I.) ?
1.2. On considère deux charges ponctuelles $q_1$et q_2 situées respectivement aux points

- *1.2.1. Donner l'expression de la force électrostatique$\overrightarrow{F}_{e1\to 2}$exercée par $q_1$sur q_2 en fonction deq_1,q_2 et$r_{12} = (M_1M_2)$? et de la permittivité électrique du vide ε_0. Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Avec quelle unité pratique exprime-t-on ε_0 dans le S.I.*

- *1.2.2. Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}_1(M_2)$ créé par la charge q_1 au point M_2 est défini par $\overrightarrow{F}_{e1\to 2} = q_2\overrightarrow{E}_1(M_2)$. Donner l'expression de $\overrightarrow{E}_1(M_2)$ et calculer le flux Φ_e de $\overrightarrow{E}_1$ à travers une surface fermée quelconque entourant le pointM_1. On rappelle que l'angle solide Φ sous lequel on voit une surface fermée quelconque à partir d'un point à l'intérieur de cette surface vaut4Π.*

- *1.2.3. Généraliser le résultat précédent à une distribution quelconque de charges en donnant le théorème de Gauss ainsi que l'équation de Maxwell-Gauss. Cette équation reste-t-elle valable en régime variable ?*

1.3. En comparant les expressions de$\overrightarrow{F}_{g1\to 2}et\overrightarrow{F}_{e1\to 2}$, dégager une analogie entre les grandeurs électriques et les grandeurs mécaniques. Quel est l'analogue mécanique du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ Le champ gravitationnel $\overrightarrow{G}$ créé en un point M de l'espace par une distribution de masse D donnée est défini par $\overrightarrow{F}_g(M) = m\overrightarrow{G}(M)$ où$\overrightarrow{F}_g(M)$ est la force gravitationnelle exercée par la distribution D sur une masse m placée au pointM.
1.4. En s'inspirant de l'analogie du§ 1.3., donner l'équivalent du théorème de Gauss pour le champ gravitationnel

créé par une distribution de masse quelconque D ainsi que l'équivalent de l'équation de Maxwell-Gauss pour le champ gravitationnel. On notera ϱ la masse volumique de la distribution. On fera attention à la nature attractive ou répulsive de la force gravitationnelle.

2^{me} *Partie*
Champ gravitationnel terrestre

On assimile la Terre à une boule (sphère pleine) homogène de centreT, de rayon R_T et de masse m_T. On repère un point M quelconque de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) telles que$r = ||\overrightarrow{TM}||$? On note $\overrightarrow{G}_T(M)$le champ gravitationnel terrestre au pointM.
2.1.En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de masse, montrer que $\overrightarrow{G}_T(M)$)peut s'écrire $\overrightarrow{G}_T(M) = G_T(r)\overrightarrow{u}_r$dans la base locale($\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi$)des coordonnées sphériques de centre T.
2.2. Montrer, sans faire de calcul, que $\overrightarrow{G}_T(r)$est nul au centre de la Terre.
2.3. En utilisant le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel, établir l'expression de $G_T(r)$en tout point M de l'espace et représenter graphiquement$G_T(r)$. On donnera l'ordre de grandeur deG_T à la surface de la Terre.
2.4.Application : On imagine que l'on perce un tunnel le long d'un diamètre de la Terre. À l'une des extrémités du tunnel on abandonne sans vitesse initiale un objet de masse m que l'on pourra assimiler à un point matériel. On néglige toute force autre que la force gravitationnelle terrestre et on supposera dans cette section(2.4.) que le référentiel terrestre est galiléen.

- *2.4.1. Établir l'équation différentielle du mouvement de l'objet. Quelle est la nature du mouvement ? Exprimer sa périodeT.*

- *2.4.2.Calculer l'ordre de grandeur de T. Commenter.*

- *2.4.3. La propriété précédente peut-elle donner lieu à une application pratique ? Laquelle ?*

3^{me} *Partie*
Dynamique terrestre - Champ de pesanteur

La dynamique terrestre s'intéresse à l'étude du mouvement des corps relativement au référentiel terrestreR_T.

*3.1. **Référentiels***

3.1.1. Donner une définition aussi claire et concise que possible du référentiel terrestreR_T, du référentiel géocentrique R_G et du référentiel de CopernicR_C.
3.1.2. Qu'appelle-t-on référentiel galiléen ? Lequel des trois référentielsR_T,R_G ou$R_C$est le " meilleur "référentiel galiléen ?
3.1.3. Quelle est la nature du mouvement de R_T par rapport à R_G ? De R_G par rapport à R_G ?
3.1.4. On appelle référentiel héliocentrique le référentiel barycentrique du soleil. En première approximation, souvent suffisante, le référentiel héliocentrique peut être confondu avec l'un des trois référentielsR_T, $R_G$ouR_C. Lequel ? Pourquoi ?
3.2.Équation fondamentalede la dynamique terrestre Dans toute la suite du problème, on s'intéressera au mouvement, relativement àR_T , d'un corps que l'on pourra assimiler à un point matériel M de massem.

- *3.2.1. Préciser le sens de l'approximation " point matériel ".*
- *3.2.2. Écrire, relativement àR_T, l'équation traduisant la deuxième loi de Newton (ou Relation Fondamentale de la Dynamique) pour le point matérielM. On utilisera les notations suivantes : $\overrightarrow{a}_{R_T}(M)$désigne l'accélération du point M par rapport au référentiel terrestreR_T. $\overrightarrow{a}_{e_{R_T/R_C}}$désigne l'accélération d'entraînement au point M du référentiel terrestre R_T par rapport au référentiel de Copernic R_C donnée par :*

$$\overrightarrow{a}_{e_{R_T/R_C}} = \overrightarrow{a}_{R_C}(T) + \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt} \times \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{TM})$$

Où

– $\overrightarrow{a}_{R_C}(T)$*est l'accélération du centre d'inertie*T*de la*Terre *par rapport à* R_C ;
– $\overrightarrow{\Omega}$*est le vecteur rotation instantané de* R_T*par rapport à* R_C ;
– $\times$ *désigne le produit vectoriel (ou produit extérieur) ;*
$\overrightarrow{a}_{c_{R_T/R_C}}(M)$*désigne l'accélération de Coriolis au point M de* R_T *par rapport à* R_C*donnée par*

$$\overrightarrow{a}_{c_{R_T/R_C}}(M) = 2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v}_{R_T}(M)$$

Où $\overrightarrow{v}_{R_T}(M)$*désigne la vitesse du point M par rapport à* R_T ;
$\overrightarrow{F}_a$*désigne la résultante des forces appliquées à*M*, autres que celles traduisant l'action gravitationnelle de la Terre et des autres astres ;*
$\overrightarrow{G}_T(M)$*désigne le champ gravitationnel terrestre au point* M ;
$\overrightarrow{G}_A(M)$*désigne le champ gravitationnel au point M créé par les autres astres (autres que la Terre).*

– *3.2.3. En appliquant un théorème adéquat de la mécanique à la Terre dans son mouvement relativement au référentiel de Copernic*R_C*, exprimera* $\overrightarrow{a}_{R_C}(T)$*en fonction de*$\overrightarrow{G}_A(T)$*. Dans cette question on pourra considérer la Terre comme une masse ponctuelle centrée en*T*.*

3.3. **Le champ de pesanteur - Équation fondamentale de la dynamique terrestre**

On définit le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ *d'un corps de masse m comme étant la force opposée à la tension T ?d'un fil qui permet de maintenir le corps en équilibre dans le référentiel terrestre ;* $\overrightarrow{g}$ *désignant le champ de pesanteur terrestre (ou accélération de la pesanteur).*

– *3.3.1. En utilisant les résultats de* 3.2.2. *et* 3.2.3.*, montrer que l'on peut écrire l'expression du champ de pesanteur*g ? *sous la forme :*

$$\overrightarrow{g}(M) = \overrightarrow{g}_0(M) + \overrightarrow{g}_1(M) + \overrightarrow{g}_2(M) + \overrightarrow{g}_3(M)$$

Où $\overrightarrow{g}_1(M) = \overrightarrow{G}_A(M) - \overrightarrow{G}_A(T)$
$\overrightarrow{g}_2(M) = -\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{TM}$
$\overrightarrow{g}_3(M) = -\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt} \times \overrightarrow{TM}$

– *3.3.2. Donner l'expression de* $\overrightarrow{g}_0(M)$ *en fonction* $\overrightarrow{G}_T(M)$.

– *3.3.3. Écrire alors l'équation dite " fondamentale de la dynamique terrestre " donnant l'accélération* $\overrightarrow{a}_{R_T}(M)$ *d'un point matériel mobile M de masse m en fonction de* m, $\overrightarrow{F}_a$, $\overrightarrow{\Omega}$*et*$\overrightarrow{v}_{R_T}(M)$*. Dans la suite de cette partie, on s'intéresse à l'examen des ordres de grandeur des différents termes intervenant dans l'expression de*$\overrightarrow{g}$.

3.4.Terme principal Dans l'hypothèse d'une symétrie sphérique de la Terre, donner l'ordre de grandeur du module $\overrightarrow{g}_0(R_T)$*de* $\overrightarrow{g}_0(M)$ *à la surface de la Terre. On pourra utiliser les résultats de la question* 2.3.
3.5. Terme différentiel ou terme de marée Le terme $\overrightarrow{g}_1(M) = \overrightarrow{G}_A(M) - \overrightarrow{G}_A(T)$ *traduit l'action des autres astres sur un corps placé au voisinage de la Terre. Ce terme différentiel est à l'origine du phénomène des marées. Considérons un astre A de masse* m_A *à symétrie sphérique situé à une distance moyenne* d_A*de la*Terre*. Pour simplifier, on considérera que les plans équatoriaux de la Terre et de l'Astre sont confondus (figure 1).*

– *3.5.1.Comparer* $\overrightarrow{g}_1(M_1)$*et* $g_1(M_2)$ *après les avoir exprimés en ne tenant compte que du terme d'ordre le plus bas non nul en*$\frac{R_T}{d_A}$ *. Représenter* $\overrightarrow{g}_1(M_1)$*et* $\overrightarrow{g}_1(M_2)$ *sur un schéma en montrant leur sens.*

– *3.5.2.Quel est, dans la disposition de la figure 1, l'état de la marée (basse ou haute) aux points* M_1, M_2, N_1*et*N_2 ?

– *3.5.3.Que peut-on en déduire quant au nombre de marées par jour ?*

– *3.5.4.Exprimer* $\overrightarrow{g}_1(N_1)$ *dans la base* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ *et montrer qu'avec le même ordre d'approximation en*$\frac{R_T}{d_A}$ *, l'une des composantes de* $\overrightarrow{g}_1(N_1)$ *est négligeable devant l'autre. Comparer alors l'intensité du terme différentiel* *aux points M_1 etN_1.*

- *3.5.5.En déduire une majoration $g_{(1)maj}$du module de $\vec{g}_1(M)$ en fonction de $G, m_A, R_T et d_A$pour des points voisins de la surface terrestre.*

- *3.5.6.Calculer l'ordre de grandeur de $g_{(1)maj}$lorsque l'astre A est la lune puis refaire le même calcul lorsque l'astre A est le soleil. Lequel de ces deux astres influe le plus sur les marées terrestres ? Peut-on négliger l'influence de l'un de ces deux astres devant celle de l'autre ?*

- *3.5.7.En comparant les ordres de grandeur de $\vec{g}_{1maj}$et$\vec{g}_0(R_T)$, montrer que l'on peut négliger, en première approximation, le terme différentiel $\vec{g}_1(M)$ devant $\vec{g}_0(M)$.*

3.6. **Les autres termes**

Relativement au référentiel géocentrique, la Terre est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe SN reliant ses deux pôles S et N de vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ et de période T. L'axe de rotation SN fait un angle constant de 23° 27 minutes d'arc par rapport à la perpendiculaire Δ au plan de la trajectoire de la Terre dans son mouvement autour du soleil ou plan de l'écliptique (figure 2).

- *3.6.1. Que vaut T ?*
- *3.6.2. En déduire une majoration $g_{(2)maj}$ du module de $\vec{g}_2(M) = -\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overrightarrow{TM}$pour un point M voisin de la surface de la Terre en fonction de Ω etR_T . Faire l'application numérique et montrer que l'on peut négliger, en première approximation $\vec{g}_2(M)$ devant $\vec{g}_0(M)$. En réalité (figure 2) l'axe de rotation de la Terre est animé d'un mouvement de précession à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}'$(période $T' \approx 26 \times 10^3$ ans de précession des équinoxes.*
- *3.6.3. En déduire une majoration $g_{(3)maj}$ du module de $\vec{g}_3(M) = -\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \overrightarrow{TM}$ pour un point M voisin de la surface de la Terre en fonction de $\Omega, \Omega' et R_T$. Faire l'application numérique et montrer que l'on peut négliger, en première approximation $\vec{g}_3(M)$ devant $\vec{g}_0(M)$.*
- *3.6.4. En tenant compte des différents ordres de grandeur précédents, réécrire l'équation fondamentale de la dynamique terrestre simplifiée.*

*3.7.***Application** *:*

le pendule de Foucault Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable attaché à un point $P(0,0,H)$ du référentiel terrestre$R_T$tel que $H = \| OP \|$, l'origine O étant prise à la surface de la Terre (figure 3). Une masse quasi ponctuelle m est attachée à l'extrémité libre M du fil. On donne pour les applications numériques : $L = 67m$ et $m = 30kg$. Dans toute la suite de la section 3.7. On supposera le champ de pesanteur uniforme et porté par la verticale ascendante Oz du lieu($\vec{g} = -g\vec{u}_z$) et on prendra $g = 9,8 m.s^{-2}$ pour les applications numériques. On note x, y, z les coordonnées du point M relativement au repère (O, x, y, z) attaché au référentiel Terrestre R_T (figure 3).

- *3.7.1. Exprimer la tension $\vec{T}_f$du fil en fonction de $T_f = ||\vec{T_f}||$,x,y,z,HetL.*
  3.7.2.$Enutilisantl'quationfondamentaledeladynamiqueterrestresimplifie, montrerquelescoordonnes$(x,y,z)deM(
  $\vec{v}_{R_T(M)}$ et $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$de $\vec{a}_{R_T}(M)$ vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$\ddot{x} = -\frac{T_f}{mL}x + 2\Omega\dot{y}\sin\lambda(1) \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -\frac{T_f}{mL}y + 2\Omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \tag{2}$$

$$\ddot{z} = -g - \frac{T_f}{mL}(z - H) + 2\Omega\dot{y}\cos\lambda \tag{3}$$

λ étant la latitude du lieu de l'expérience.

- *3.7.3. Montrer que dans le cadre de l'hypothèse des mouvements de faible amplitude, l'équation (3) ci-dessus impose$T_f \approx mg$.*
- *3.7.4.En déduire un système de deux équations différentielles caractérisant la projection du mouvement de M dans le plan(xOy). Pour cela on négligera a priori le terme $\dot{z}cos\lambda$ devant $\dot{x}sin\lambda$ dans l'équation (2) ; Cette*

hypothèse sera vérifiée a posteriori (section 3.7.14). On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ *Pour résoudre le système différentiel précédent (sous section 3.7.4.) on pose* $\rho = x + iy$, *iétant le nombre complexe de module 1 et d'argument* $\frac{\pi}{2}$.

- *3.7.5. Établir l'équation différentielle vérifiée par la variable complexe* ρ. *Afin de pouvoir résoudre l'équation différentielle satisfaite par* ρ *et déterminer la nature de la projection dans le plan (xOy) de la trajectoire du pointM, on commence par déterminer les équations du mouvement dans le repère (O,x',y',z'). L'axe Oz' est confondu avec Oz. Le repère (O,x,y,z) tourne autour de Oz' à la vitesse angulaire constante* $\omega = \Omega sin\lambda$. *Soit* $\rho' = x' + iy'$ *où* x' *et* y' *désignent les coordonnées de M par rapport à(O,x'y'z')*
- *3.7.6.Exprimer* ρ'*en fonction de* ρ,ω *et du tempst.*
- *3.7.7.Établir l'équation différentielle vérifiée par*ρ'.
- *3.7.8.Par un calcul d'ordres de grandeur, vérifier qu'aux latitudes moyennes* ($\lambda \approx 30^\circ$), ω^2*est négligeable devant* ω_0^2.
- *3.7.9.Donner alors la forme générale des solutions* ρ'. *On adopte les conditions initiales suivantes : à l'instant* $t = 0$,$x = x_0$,$y = 0$,$\dot{x} = 0$ *et*$\dot{y} = 0$.
- *3.7.10.En déduire alors* $\rho'(t)$ *puis* $x'(t)$ *et* $y'(t)$.
- *3.7.11.Montrer que dans le plan*($x'Oy'$), *la trajectoire de M est une ellipse.*
- *3.7.12.Exprimer son demi-grand axe a suivant Ox' et son demi-petit axe b suivant* Oy' *en fonction de* x_0,ω *et* ω_0 *et montrer que l'ellipse est très aplatie dans une direction que l'on précisera.*
- *3.7.13. Déduire de ce qui précède la nature du mouvement de M relativement à* R_T.
- *3.7.14. L'approximation utilisée en 3.7.4. est-elle légitime ?*

Lecture

"Vous êtes invités à venir voir tourner la terre ... ", tels sont les mots, libellés dans un style un peu surréaliste et profanatoire, que le physicien Foucault utilisa en 1851 pour dire sa découverte et pour en rendre visible la démonstration sous la coupole du Panthéon à Paris (Voir Illustration).

- *3.7.15.De quelle découverte s'agit-il ?*
- *3.7.16.Comment la démonstration de Foucault permet-elle de Rendre compte du mouvement de la Terre ?*
- *3.7.17. De quel mouvement de la Terre s'agit-il et par rapport à quel référentiel ?*
- *3.7.18. Exprimer la période* T' *de rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault en fonction de T et*λ *et déterminer sa valeur numérique aux latitudes moyennes*($\lambda = 30^\circ nord$).