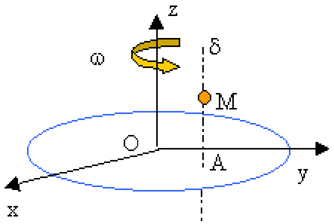
Mécanique du point matériel

Révion

Programme de sup

A. cinématique du point matériel un petit cheval de bois sur un manège

Le manège est constitué d'un disque de centre O tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω constante. Le référentiel d'étude est galiléen. Le cheval de bois M effectue un mouvement vertical suivant l'axe δ, d'amplitude a ; le mouvement du cheval est périodique : $z = a(1 + sin(\Omega t))$



1. Donner les équations paramétriques du mouvement du cheval M ainsi que sa trajectoire.
2. Donner les coordonnées et le module du vecteur vitesse.
3. Donner les coordonnées et le module du vecteur accélération.
4. Reprendre les calculs précédents en coordonnées cylindriques (l'origine des angles polaires coïncide avec Ox).

B. changement de réferentiel

soit le système suivant, représenté Figure ci- contre. composé de deux tiges. La premIère tige est en rotation de centre o_0 relativement au refèrentiel galileen g. une seconde tige est en rotaticn de centre O_1 relativement à la première tige.

1. On s'intéresse au mouvement de la tige (2) re1ativement à un referentiel R_1 lié a la tige (1), On travaillera dans le repère $(0, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$. L'angle $\psi(t)$ évolue de manière quelconque.
   (a) En se plaçant en coordonnées polaires dans le référentiel R_1,donner la position, la vitesse et l'accélération du point M,
   (b) Sur un shèma, traçer les vecteurs $\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{V_{R_1}(M)}, \overrightarrow{\gamma_{R_1}(M)}$ ainsi que les vecteurs accéleration tangentielle et accélération normale $\overrightarrow{\gamma_{TR_1}(M)}, \overrightarrow{\gamma_{NR_1}(M)}$
   (c) Donner en coordonnees cartésiennes, les vecteurs positions, vitesses, accélérations du point M relativement au référentiel R_1
2. On se place maintenant dans le référentiel R_0 On travaillera dans la base $(0, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$. L'angle $\theta(t)$ évolue de manière quelconque. Tous les résultats seront donnés eu coordonnées cartésiennes en projection sur la base (x_1, y_1, z_1)

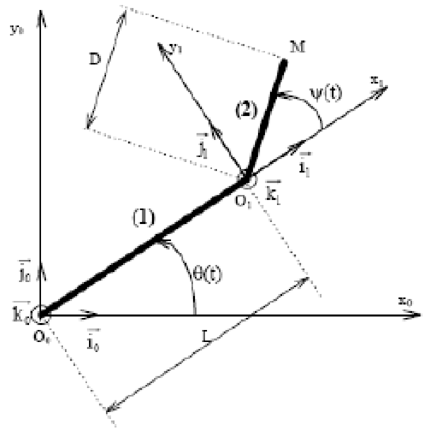
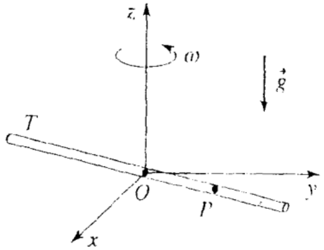


Fig. 1 –

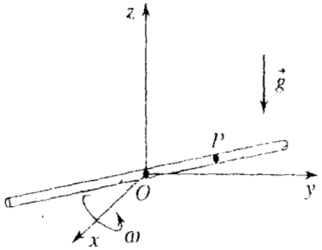
   (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)$ dans la base (l)
   (b) Calculer la vitesse du point P appartenant à (1), point coïncidant au point M, relativement au référentiel R_0. en projection dans la base (1).(vitesse d'entraînement).
   (c) Calculer l'accélération du point P appartenant à (1) point coïncidant au point M, relativement au référentiel R_0. en projection dans la base (1).
   (d) Calculer l'accélération de Coriolis du point M de vitesse relative $\overrightarrow{V_{R_1}(M)}$,relativement au référentiel R_0. en projection dans la base (1).
   (e) Déduire des questions précédentes la vitesses et l'accélèration absolue du point M : $\overrightarrow{V_{R_0}(M)}$, $\overrightarrow{\gamma_{R_0}(M)}$
3. On se place dans le cas particulier lequel l'angle $\psi(t) = \omega t$ et l'angle $\theta(t) = \omega t$
   (a) Donner l'équation du mouvement de M(t) par rapport au temps
   (b) Quel est le lieu de M au cours du temps ? Dessinez le sur un schéma.
4. On se place dans le cas palticulier pour lequel l'angle $\psi(t) = \omega t$ et l'angle $\theta(t) = -\omega t$, Quel est le lieu de M au cours du temps ? Dessinez le sur un schéma.

C. dynamique du point matériel

L'exercice envisage différentes situations d'une bille B, de massem, quasi ponctuelle, soumise à la pesanteur et susceptible de se déplacer à l'intérieur d'un tube cylindrique mince T, de longueur 2l, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe passant par son centreO. L'accélération de la pesanteur est $\overrightarrow{g}$, de module g constant, dirigée selon la verticale descendante.

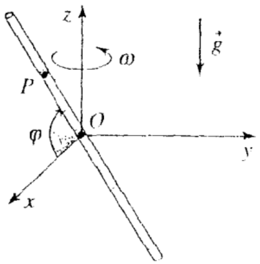


La position de B dans le tube est repérée par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$, On pose $r = \|\overrightarrow{r}\|$ et $v = \frac{dr}{dt}$
À l'instant initial, $r = r_0, v = v_0$
Les mouvements de la bille ont lieu sans frottements.



1) - Le tube T est dans le plan horizontal (xOy) et tourne autour de l'axe(Oz), selon la figure ci-contre. Établir l'équation différentielle vérifiée par r(t). Intégrer cette équation en tenant compte des conditions initiales. Établir l'expression du temps τ que mettra la bille pour sortir du tube. Calculer τ pour : $l = 0,1m$; $r_0 = 1cm$; $v_0 = 0m.s^{-1}$ et $\omega = 2rad.s^{-1}$

2) - Le tube T est dans le plan vertical (yOz) et tourne autour de l'axe (Ox) selon la figure ci-contre, À l'instantt, le tube T fait l'angle $\theta = \omega t$ avec l'axe(Oy). On utilisera la base de projection liée au tube : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{e_z})$ ou $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$ est tangent au tube, $\overrightarrow{\tau}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ dans la direction des θ croissants $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\tau}$. On note $\overrightarrow{R}$ la réaction du tube $R = \|\overrightarrow{R}\|$.



- ***a-*** Établir l'équation différentielle en r(t) du mouvement deB.
- ***b-*** Intégrer cette équation en tenant compte des conditions initiales.
- ***c-*** Établir l'expression de R(t).
- ***d-*** Discuter des équilibres possibles de B par rapport au tube.À quelle condition le mouvement est il sinusoïdal ?
- ***e-*** Décrire le mouvement pour les conditions initiales liées : $r = r_0$ et $v_0 = \frac{g}{2\omega} - r_0\omega$

3) - Le tube T est, dans le plan vertical (xOz) du repère mobile(Oxyz) orthononné, en rotation autour de l'axe(Oz), la vitesse angulaire ω étant constante. La position du tube T dans ce repère est fixée par l'angle φ qu'il fait avec l'axe (Ox)$(0 < \varphi < \pi/2)$
On note $\overrightarrow{R}$ la réaction du tube. On choisit la base de projection $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'})$, où $\overrightarrow{u}$ est défini comme à la question 2 et $\overrightarrow{u'}$ orthogonale à $\overrightarrow{u}$ dans le plan (xOz) décrit dans la figure ci-dessus.

- ***a-*** Déterminer l'équation différentielle en r(t) du mouvement deB.
- ***b-*** Intégrer cette équation en tenant compte des conditions initiales.
- ***c-*** Discuter des équilibres possibles deB et de leur stabilité.

D. Théorèmes généraux

Un cerceau est assimilable à un cercle de centre O' et de rayon a. Situé dans un plan vertical xOz, il tourne autour d'une de ses tangentes verticalesOz à vitesse angulaire Ω constante. Un anneau qui sera assimilé à un point M de masse m est mobile sans frottement sur ce cerceau. On note θ l'angle que fait O'M avec la verticale descendante passant par O' et compté positivement dans le sens trigonométrique. On note R le référentiel galiléen Oxyz et R' le référentiel Ox'y'z lié au cerceau.

- **Utilisation du principe fondamental de la dynamique :**
  1. Écrire le principe fondamental de la dynamique dansR'. On notera $\overrightarrow{f_{ie}}$, $\overrightarrow{f_{ic}}$ et $\overrightarrow{R}$ respectivement les forces d'inertie d'entraînement, de Coriolis et la réaction du cerceau sur M.
  2. Établir l'expression de $\overrightarrow{f_{ie}}$ et montrer que cette force est colinéaire à $\overrightarrow{u'_x}$
  3. Établir l'expression de $\overrightarrow{f_{ic}}$ et montrer que cette force est colinéaire à $\overrightarrow{u'_y}$
  4. En déduire que l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme : $a\ddot{\theta} = f(\theta)$
  5. Donner l'expression des composantes de la réaction du cerceau dans la base$(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_y})$
- **Utilisation du théorème du moment cinétique :**
  1. Définir le moment cinétique du point M en O'dans le référentiel R' et donner son expression.
  2. Exprimer le théorème du moment cinétique dans le référentiel R'.
  3. En déduire l'équation du mouvement.
  4. Peut-on obtenir par ce théorème les expressions des composantes de la réaction du cerceau ? Si oui, donner les expressions correspondantes.
- **Utilisation de l'énergie mécanique :**
  1. Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'un potentiel U_1 dont on donnera l'expression.
  2. Exprimer l'énergie potentielle U_2 dont dérive le poids.
  3. Les autres forces dérivent-elles d'un potentiel ? Justifier la réponse. En déduire l'expression de l'énergie potentielle U(r) du point M en prenant U(0)=0.
  4. Justifier le fait qu'on puisse appliquer la conservation de l'énergie mécanique.
  5. Retrouver l'équation du mouvement par la conservation de l'énergie mécanique.

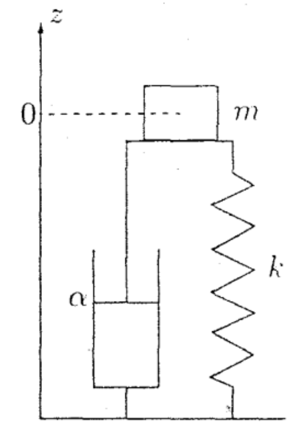
- **Étude de l'équilibre relatif :**
  1. Établir que l'équation donnant les positions d'équilibre est :

$$a\Omega^2(1+sin\theta) = gtan\theta$$

  2. Montrer par un raisonnement graphique que cette équation admet deux solutions. On précisera l'intervalle auquel elles appartiennent.
  3. On désire qu'une position d'équilibre existe pour $\theta = \pi/6$. Calculer la valeur de la vitesse de rotation correspondante.
  4. Cette position ci' équilibre est-elle stable ?

E. des oscillations mécaniques

Lorsqu'un moteur fonctionne, le balourd provoque des vibrations du châssis qu'il est nécessaire de supprimer par un système de suspension. On considère dans ce problème que le moteur est assimilable à un point matériel de massem. On modélise la suspension par un ressort vertical de longueur à vide l_0 et de raideur k placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage verticale $\overrightarrow{f} = -\alpha\frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$



1. Déterminer la longueur l_e du ressort lorsque le moteur ne fonctionne pas et est immobile. On prendra cette position comme origine sur l'axe Oz.
2. Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre et on le laisse évoluer librement. Établir l'équation différentielle vérifiée par z.
3. On pose $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ on suppose $\lambda < \omega_0$. Donner la forme générale de la solution z en fonction de λ et ω_0. Comment appelle-t-on ce type de régime ?
4. Déterminer les constantes d'intégration compte tenu des conditions initiales.
5. Établir l'expression de l'énergie mécanique en fonction notamment de z et de $\dot{z}$ sa dérivée par rapport au temps.
6. Établir que le système n'est pas conservatif
7. Retrouver l'équation du mouvement par une étude énergétique.
8. Dans la suite, le moteur fonctionne et tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire $F_0 cos\omega t\overrightarrow{u_z}$. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par z.
9. On utilise la notation complexe. Exprimer la vitesse complexe.
10. En déduire l'expression du module V de la vitesse.
11. Étudier ses variations et montrer qu'il y a résonance pour une pulsation qu'on déterminera. Tracer V en fonction de la pulsation.
12. La pulsation vaut $628 rad.s^{-1}$. Le moteur à une masse de 10 kg et on dispose pour réaliser la suspension de deux ressorts l'un de raideur $4.10^6 N.m^{-1}$ et l'autre de raideur $10^6 N.m^{-1}$. Lequel choisit-on ? Pourquoi ?

F - Généralités sur le problème à deux corps

On considère un système isolé constitué de deux particules A et B de masses respectives m_a et m_b . On étudie ce système dans un référentiel (R) supposé galiléen. On se donne également un point O fixe dans ce référentiel. On appelle $\overrightarrow{F_a}$(respectivement $\overrightarrow{F_b}$) la force exercée par B sur A(respectivement exercée par A sur B). On suppose que leur module ne dépend que de la distance r entre les deux particules.

1. Soit C le centre de masse du système S. Dans le référentiel (R), donner l'expression de la vitesse de C en fonction des vitesses des points A et B. Quel est le mouvement de C dans (R) ?
2. Qu'appelle-t-on référentiel barycentrique ?
3. On se place dans le référentiel barycentrique (R^*) du système S. On note $\overrightarrow{r_a} = \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{r_b} = \overrightarrow{CB}$ et on appelle $\overrightarrow{v_a^*}$(respectivement $\overrightarrow{v_b^*}$) la vitesse du point A(respectivement la vitesse du point B) dans ce référentiel. Quelle est la relation entre $\overrightarrow{v_a^*}$ et $\overrightarrow{v_b^*}$?
4. On pose $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB}$. Donner le lien entre $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{r_a}$ puis entre $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{r_b}$.
5. Montrer que le problème possédait initialement 6 variables d'espace et qu'il est maintenant réduit à 3 variables d'espace dans le référentiel barycentrique.
6. Montrer que l'étude du système dans ce référentiel se réduit à l'étude plus simple du mouvement d'une seule particule (que l'on nommera mobile fictif) de masse μ et de vecteur position $\overrightarrow{r}$ soumise à la force $\overrightarrow{F_a}$. On donnera l'expression de μ.
7. Dans le cas particulier où $m_a \gg m_b$, que vaut μ et où se trouve le centre de masse C ?

G- Méthodes d'étude du mouvement de deux points en interaction newtonienne

On étudie le mouvement de deux points matériels A et B, de masse m_a et m_b, en interaction newtonienne : la force exercée par B sur A, s'écrit $\overrightarrow{f} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$. La position de la particule réduite P est repérée par ses coordonnées polaires d'origine G (centre de masse du système). L'axe d'origine des angles est l'axe (Gx). On se propose, dans cette partie, de retrouver les résultats du cours au sujet de la trajectoire de P de plusieurs manières différentes.

1. On rappelle les formules de Binet :

$$v^2 = C^2(u^2 + (\frac{du}{d\theta})^2), ou \quad u = \frac{1}{r} \quad et \quad C = \frac{L}{\mu} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{a} = C^2u^2(u + \frac{d^2u}{d\theta^2})\overrightarrow{e_r} \quad (2)$$

(a) Qu'appelle-t-on C

(b) Démontrer les deux relations de Binet

2. Déterminer l'équation polaire de la trajectoire en utilisant (2).
3. Déterminer le paramètre p en fonction de μ, k et C et donner la signification de l'excentricité e.
4. Écrire l'équation différentielle reliant la vitesse $\overrightarrow{v}$ à $\overrightarrow{e_\theta}$:

   (a) Montrer que l'on peut intégrer cette équation sous la forme (1) : $\overrightarrow{v} = h(\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{e})$, où $\overrightarrow{e}$ est un vecteur constant, appelé" vecteur excentricité (on notera $e = ||\overrightarrow{e}||$ et $(\overrightarrow{GX}, \overrightarrow{e}) = \theta_0 + \pi/2$) et où h est une constante que l'on déterminera en fonction de μ , k et C .

   (b) Montrer que, en multipliant scalairement l'équation précédente par $\overrightarrow{e_\theta}$, on peut en déduire la trajectoire de M en coordonnées polaires :

   $$r = \frac{p}{1 + q\cos(\theta - \theta_0)}$$

   Déterminer le paramètre p en fonction de μ, k et C et l'excentricité e en fonction de q.

   (c) En élevant le vecteur excentricité au carré, montrer que l'on peut obtenir l'énergie totale ξ de M sous la forme (3) : $\xi = \xi_0(e^2 - 1)$. On déterminera ξ_0 en fonction de μ, k et C. Discuter la nature de la trajectoire suivant la valeur de ξ.
5. Soit $m_b \gg m_a$. On pose $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$, $\overrightarrow{p} = m_a\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p}$. Avec $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{BP}$
   Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{l}$ est constant. Quelle(s) conséquence(s) en déduit-on pour sa trajectoire ?
6. on pose $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p} + m_a k\frac{\overrightarrow{r}}{r}$. Montrer que ce vecteur est bien une constante du mouvement. A quel plan appartient ce vecteur.
7. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{\Gamma}$ dans la base polaire ; en déduire l'équation de la trajectoire. On appelle $||\overrightarrow{\Gamma}||$ la norme de $\overrightarrow{\Gamma}$ et θ_0 l'angle entre $\overrightarrow{\Gamma}$ et (Gx), Comment est dirigé $\overrightarrow{\Gamma}$ par rapport à la trajectoire ?
8. montrer que $||\overrightarrow{\Gamma}||^2 = m_a^2K^2(1 + \frac{2L^2\xi}{m_aK^2})$, Déterminer la relation entre l'énergie ξ et l'excentricité e de la trajectoire.

H. Mouvement d'un point matèriel dans un champ NEWTONIEN

On étudie le mouvement d'un satellite dans le champ gravitationnel terrestre. Ce satellite est considéré comme un objet ponctuel. La terre est assimilée à une répartition sphérique de masse. On montre que dans ces conditions son champ gravitationnel en un point extérieur rst idntique à ce celui que créerait une masse ponctuelle placée en son centre et égalle à sa masse totale.
l'étude est menée dans le référentiel géocntrique lié au centre O de la terreeten translation par rapport aux axes de Copernic. Ce référentiel est considéré galiliéen.
On ne tient compte que du champ gravitationnel trrestre.
On utilisera les valeurs numèriques suivantes :

- masse de la Terre : $M_T = 6,00.10^24kg$;
- rayon de la Terre : $R_T = 6400km$;
- constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^-11N.m^2.kg^-2$;
- durée du jour sidéral : $T_0 = 86164s$.

1. Donner l'expression du champ gravitationnel terrestre $\overrightarrow{\xi}$ enun point M situé à la distance $r > R_T$ du centre de la terre.
2. satellites circulaires. On désire placer un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon r dont le centre sera confondu avec le centre de la terre.

   (a) Montrer que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.

   (b) Le satellite ayant atteint, au cours de la phase de lancement, un point M distant de r du centre O de la Terre, quelles caractéritiques doit-on donner à son vecteur vitesse pour le placer en ce point en orbite circulaire ?

   (c) Etablir l'éxpression de la période T du satellite en fonction du rayon de son orbite.

   (d) Etablir l'expression de l'énergie E du satellite sur sa trajectoire circuliare en fonction du rayon de son orbite.

   (e) soit λ la latitude de la base de lancement et Ω la vitesse de rotation de la terre autour de l'axe de ses pôles. Quelle énergie faut-il communiquer au satellite pour le placer, depuis le sol, sur son orbite circulaire ? Quel est l'intérêt d'une base équatoriale ?

   (f) Application numérique : $r = 6600km$; calculer la vitesse du satellite sur son orbite circulaire, ainsi que la période de son mouvement.

   (g) Satellites géostationnaires.

   - Donner la déinition d'un satellite géostationnaire.
   - Est-il possible de placer un satellite géostationnaire à la verticale de paris ? Justifier la réponse.
   - Calculer le rayon de l'orbite géostationnaire.
   - Calculer la vitesse du satellite sur cette orbite.
3. **Etude d'une orbite de transfert**.
   On désire faire passer le satellite précédent de l'orbite circulaire (O_1) de rayon r_1 à l'orbite circulaire (O_2) de rayon r_2 $(r_2 > r_1)$. Pour y parvenir, on lui fait emprunter une orbite de transfert elliptique (ξ), tangente en son périgée M_1 à l'orbite (ξ_1) et

en son apogée M_2 à l'orbite (ξ_2). Les passages en M_1 de l'orbite (ξ_1) à l'orbite (ξ) et en M_2 de l'orbite (ξ) à l'orbite (ξ_2), sont effectués en fournissant au satellite, à l'aide de propulseurs, deux impulsions permmettant d'augmenter respectivement son énergie de ΔE_1 et ΔE_2 ($fig.5$). On admettera que les relations donnant E et T, établies avec r pour les trajectoires circulaires, restent formellement valables ici, pour des trajectoires elliptiques de demi-grand axe a en remplaçant r par a.

(a) Quel est le demi-grand axe de l'orbite de transfert ?

(b) Quelles sont les énergies respectives du satellite sur les orbites (ξ_1),(ξ_2),(ξ), en fonction de G, M_T, m, r_1, etr_2 ?

(c) Exprimer ΔE_1 et ΔE_2 en fonction des mêmes paramètres. Application nimérique : Calculer ΔE_1 et ΔE_2 : $m = 100kg$; $r_1 = 6600km$;$r_2 = 42200km$.

(d) Calculer la durée du transfert de l'orbite (ξ_1) d'altitude $200km$, à l'orbite (ξ_2) d'altitude $35800km$.